



Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

Μιγαδικοί Αριθμοί

Ιωάννης Λυχναρόπουλος
Μαθηματικός, MSc, PhD

Σύνολο Μιγαδικών (Complex) Αριθμών

$$\mathbb{C} = \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

$$i^2 = -1 \quad i : \text{Φανταστική Μονάδα}$$

$$i = \sqrt{-1}$$

$$\operatorname{Re}(z) = a \quad \text{Πραγματικό μέρος}$$

$$\operatorname{Im}(z) = b \quad \text{Φανταστικό μέρος}$$

Επεκταμένο σύνολο μιγαδικών

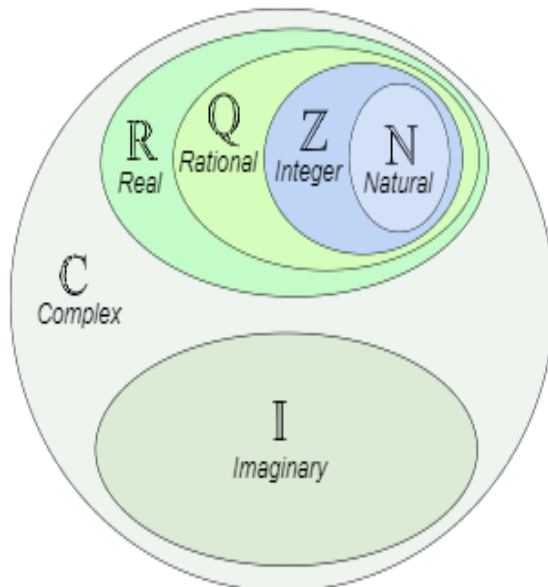
$$\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \infty$$

Σημείωση: Στους μιγαδικούς δεν υπάρχει $-\infty$
Επίσης το ∞ αποτελεί συγκεκριμένο σημείο
(εμφανίζεται στη σφαίρα του Riemann).

$$a + i0 = a \quad \text{Πραγματικός αριθμός}$$

$$0 + ib = ib \quad \text{Φανταστικός αριθμός}$$

Ειδικά το 0 εκτός από πραγματικός μπορεί
να θεωρηθεί και φανταστικός αριθμός



Ισότητα Μιγαδικών

$$a + ib = c + id \Leftrightarrow a = c \text{ και } b = d$$

$$\text{π.χ. } a + ib = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ και } b = 0$$

Προσοχή: Η διάταξη και οι ιδιότητές της δεν
επεκτείνονται από το σύνολο των πραγματικών
αριθμών στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών
π.χ. Η σχέση $z^2 \geq 0$ δεν ισχύει για κάθε $z \in \mathbb{C}$
Για παράδειγμα: $z = i \Rightarrow z^2 = i^2 = -1 < 0$

Ισοδύναμες αναπαραστάσεις Μιγαδικών Αριθμών

Κλασική αναπαράσταση:

$$z = a + ib \quad \text{Γράφεται και ως: } z = a + bi$$

Αναπαράσταση ως διάνυσμα του $\mathbb{R}^2$

$$z = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \quad \text{ή} \quad z = (a, b)$$

Σημείωση: Το γινόμενο πρέπει να ορισθεί κατάλληλα και δεν αντιστοιχεί σε εσωτερικό ή εξωτερικό γινόμενο διανυσμάτων

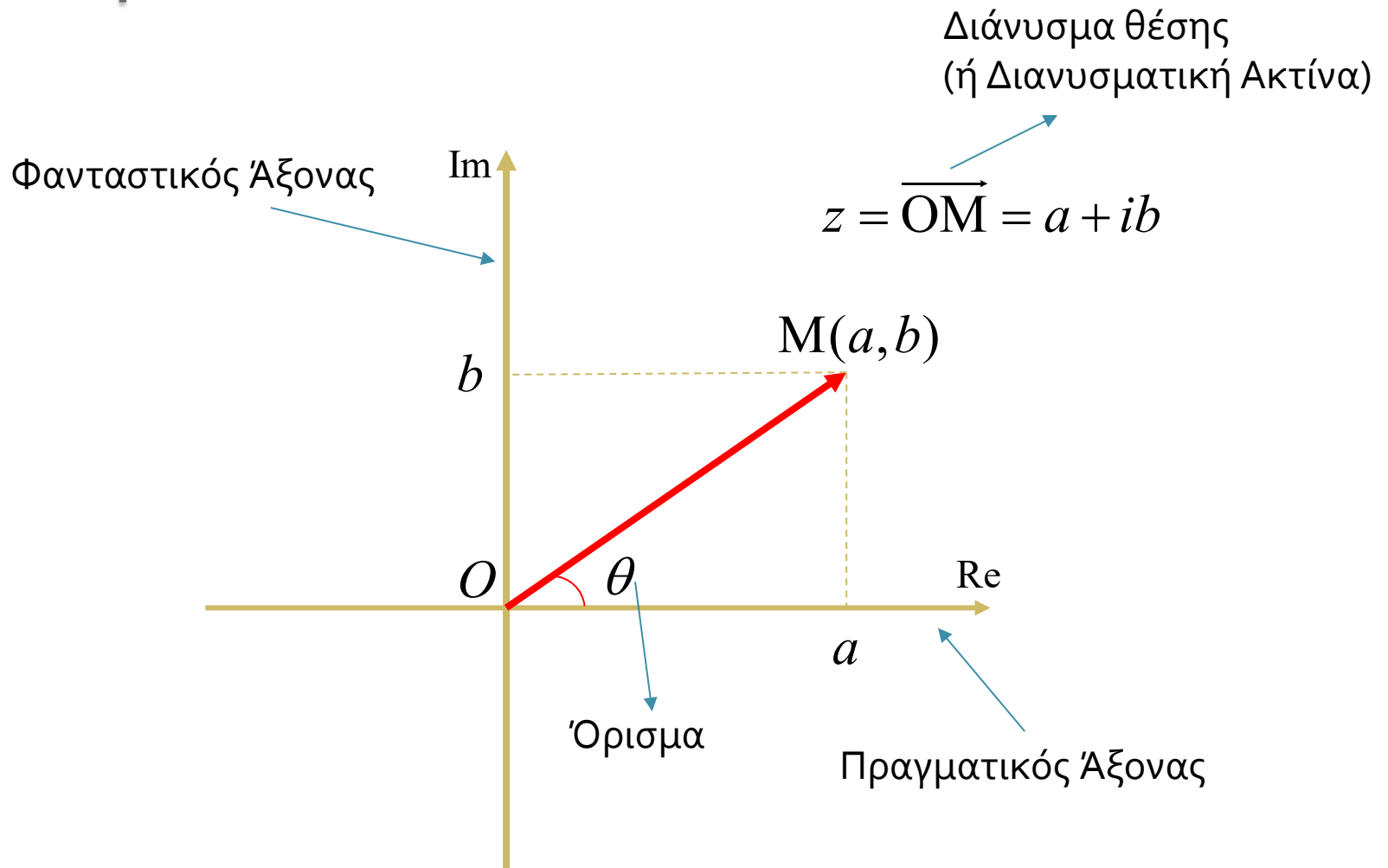
Αναπαράσταση ως πίνακα 2×2

$$z = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$

Το σύνολο αυτό αποτελεί υποχώρο του διανυσματικού χώρου των 2×2 πινάκων και έχει διάσταση 2, επομένως είναι ισόμορφος χώρος με τον χώρο $\mathbb{R}^2$

Σε αυτή την αναπαράσταση το μιγαδικό γινόμενο αντιστοιχεί στο σύνηθες γινόμενο πινάκων

Μιγαδικό Επίπεδο



Πράξεις Μιγαδικών Αριθμών

Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί:

$$z_1 = a + ib, \quad z_2 = c + id$$

τότε ορίζουμε τις πράξεις

$$z_1 + z_2 = (a + c) + i(b + d)$$

$$z_1 - z_2 = (a - c) + i(b - d)$$

$$z_1 z_2 = (ac - bd) + i(ad + bc)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + i \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}$$

Οι ιδιότητες των αντίστοιχων πράξεων με πραγματικούς αριθμούς μεταφέρονται και στους μιγαδικούς αριθμούς.

Δυνάμεις Μιγαδικών Αριθμών

Ισχύουν οι γνωστές σχέσεις από τις δυνάμεις πραγματικών αριθμών:

$$z^0 = 1, \quad z^n = z^{n-1} z, \quad z^{-n} = \frac{1}{z^n}, z \neq 0$$

Αν $z = a + ib$ τότε $z^{-1} = \frac{a}{a^2 + b^2} - i \frac{b}{a^2 + b^2}$
 αντίστροφος

Ειδικότερα για τις δυνάμεις της φανταστικής μονάδας ισχύει:

$$i^n = i^{4k+v} = i^v = \begin{cases} 1, & \alpha v \mod 4 = 0 \\ i, & \alpha v \mod 4 = 1 \\ -1, & \alpha v \mod 4 = 2 \\ -i, & \alpha v \mod 4 = 3 \end{cases}$$

Συζυγείς αριθμοί

$$z = a \pm ib$$

$$\bar{z} = a \mp ib$$

Ιδιότητες

$$\overline{\bar{z}} = z$$

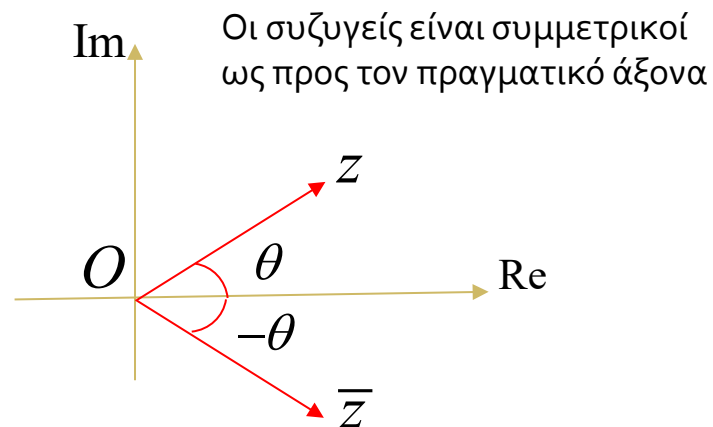
$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$$

$$\overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$$

$$\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2, \quad \overline{(z^n)} = \bar{z}^n$$

$$\overline{\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \bar{z}_1 \\ \bar{z}_2 \end{pmatrix}$$

$$z\bar{z} = |z|^2 = a^2 + b^2$$



$$z + \bar{z} = 2a \quad \text{ή} \quad \operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$$

$$z - \bar{z} = 2bi \quad \text{ή} \quad \operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

$$z = -\bar{z} \Leftrightarrow \text{o } z \text{ φανταστικός}$$

$$z = \bar{z} \Leftrightarrow \text{o } z \text{ πραγματικός}$$

Μέτρο Μιγαδικού

Ορισμός

Αν $z = a + ib$ τότε το μέτρο του είναι ο θετικός πραγματικός αριθμός

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Ιδιότητες

$$|z| = |-z| = |\bar{z}| = |-\bar{z}|$$

$$|z|^2 = |z^2| = z \bar{z} = a^2 + b^2$$

$$|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|, \quad |z^n| = |z|^n$$

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad z_2 \neq 0$$

Ανισότητες

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \quad \text{Τριγωνική ανισότητα}$$

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2| \quad \text{Αντίστροφη Τριγωνική ανισότητα}$$

Ισχύουν επίσης:

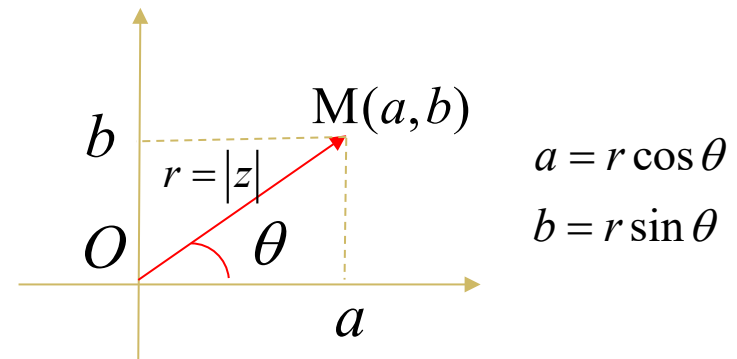
$$|z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2|$$

Πολική (τριγωνομετρική) μορφή

Έστω ο $z = a + ib \neq 0$

με μέτρο $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$



$\theta = \arg(z)$: Όρισμα του μιγαδικού αριθμού

$Arg(z)$: Πρωτεύον Όρισμα. Ορίζεται στο $(-\pi, \pi]$ και έχει μοναδική τιμή.

$$\arg(z) = Arg(z) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

Σε ορισμένα συγγράμματα
ορίζεται στο $[0, 2\pi)$

Ισότητα Μιγαδικών σε πολική μορφή

Αν $z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$ και $z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$

$$\text{τότε } z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} r_1 = r_2 \\ \theta_1 - \theta_2 = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Εκθετική μορφή

Τύπος Euler

$$e^{\pm i\theta} = \cos \theta \pm i \sin \theta \quad \text{π.χ. } e^{i\pi} = -1$$

$$z = re^{i\theta}$$

$$\text{όπου } r = |z|, \quad \theta = \text{Arg}(z) + 2k\pi$$

Τριγωνομετρικές συναρτήσεις

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2}$$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

Προσοχή: Δεν ισχύουν:

$$|\sin z| \leq 1$$

$$|\cos z| \leq 1$$

Οι συναρτήσεις $\sin, \cos$
δεν είναι φραγμένες
στο $\mathbb{C}$.

Υπερβολικές συναρτήσεις

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

Λογάριθμοι

$$\ln(z) = \ln(re^{i(\text{Arg}(z)+2k\pi)}) = \ln(r) + i(\text{Arg}(z) + 2k\pi) \quad \text{Πλειότιμη απεικόνιση}$$

$$Ln(z) = \ln(r) + i\text{Arg}(z) \quad \text{Συνάρτηση}$$

$$\text{π.χ. } Ln(-1) = i\pi$$

Γινόμενο – Πηλίκο

$$z_1 = r_1 (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$$

$$z_2 = r_2 (\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$$

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)) = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)) = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$$

Δύναμη μιγαδικού

$$z^n = r^n (\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)) = r^n e^{in\theta}$$

Τύπος του **De Moivre**

Ρίζες Μιγαδικού Αριθμού

$1^{1/n}$, $n > 0 \in \mathbb{Z}$ n -οστές ρίζες της μονάδας

Προκύπτουν ως λύσεις της εξίσωσης:

$$a^n = 1$$

$$a_k = e^{i \frac{2k\pi}{n}} = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n} = \omega^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

Έστω $\omega = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n} = e^{i \frac{2\pi}{n}}$

Όλες οι ρίζες της μονάδας γράφονται ως

$$1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{n-1}$$

Βρίσκονται σε ισαπέχοντα σημεία του μοναδιαίου κύκλου.
η διακριτές τιμές, έπειτα επαναλαμβάνονται.

$z^{1/n}$, $z \neq 0$, $n > 0 \in \mathbb{Z}$ Γενική περίπτωση

Προκύπτουν ως λύσεις της εξίσωσης:

$$a^n = z$$

Αν $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$

$$a_k = \sqrt[n]{r} e^{i \frac{2k\pi + \theta}{n}} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{2k\pi + \theta}{n} + i \sin \frac{2k\pi + \theta}{n} \right), \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

Έστω a οποιαδήποτε ρίζα του z_0 τότε όλες οι ρίζες του z_0 γράφονται ως

$$a, a\omega, a\omega^2, \dots, a\omega^{n-1}$$

Βρίσκονται σε ισαπέχοντα σημεία κύκλου ακτίνας $\sqrt[n]{r}$.
η διακριτές τιμές, έπειτα επαναλαμβάνονται.

Γεωμετρικοί Τόποι

- $|z - z_0| = R, \quad R \in \mathbb{R}, R > 0$

Κύκλος με κέντρο το z_0 και ακτίνα R

- $|z - z_0| \leq R, \quad R \in \mathbb{R}, R > 0$

Κυκλικός δίσκος με κέντρο το z_0 και ακτίνα R

- $|z - z_1| = |z - z_2|$

Μεσοκάθετος του τμήματος M_1M_2 $z_1 = \overrightarrow{OM_1}, z_2 = \overrightarrow{OM_2}$

- $|z - z_1| \geq |z - z_2|$

Ημιεπίπεδο με ακμή την μεσοκάθετο του τμήματος M_1M_2 ,
το οποίο ημιεπίπεδο περιέχει το M_2

Σχεδιασμός γεωμετρικών τόπων σε Mathematica:

$$z = x + I y$$

$$z_0 = 3 - I 2$$

$$R=5$$

```
ContourPlot[Abs[z-z0]==R,{x,-8,8},  
{y,-8,8},Axes->True]
```

Επίσης, για ανισότητες:

```
RegionPlot[Abs[z-z0]<=R,{x,-8,8},  
{y,-8,8},Axes->True]
```

Γεωμετρικοί Τόποι

- $|z - ic| + |z + ic| = 2a, \quad a, c \in \mathbb{R}, \quad 0 < c < a$

Έλλειψη με εστίες $E(0, c), E'(0, -c)$

Ο άξονας yy' είναι ο μεγάλος άξονας με μήκος $2a$ και ο xx' είναι ο μικρός άξονας με μήκος $2b$, όπου $b = \sqrt{a - c^2}$

- $|z - c| + |z + c| = 2a, \quad a, c \in \mathbb{R}, \quad 0 < c < a$

Έλλειψη με εστίες $E(c, 0), E'(-c, 0)$

Ο άξονας xx' είναι ο μεγάλος άξονας με μήκος $2a$ και ο yy' είναι ο μικρός άξονας με μήκος $2b$, όπου $b = \sqrt{a - c^2}$

- $||z - c| - |z + c|| = 2a, \quad a, c \in \mathbb{R}, \quad 0 < a < c$

Υπερβολή με εστίες $E(c, 0), E'(-c, 0)$