

**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ – ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ**  
**ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΒΙΟΜΗΧΑΝΙΑΣ**



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ  
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ ΕΠΕΑΕΚ  
ΕΥΡΩΠΑΪΚΗ ΕΝΩΣΗ  
ΣΥΓΧΡΗΜΑΤΟΔΟΤΗΣΗ  
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ  
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΤΑΜΕΙΟ ΠΕΡΙΦΕΡΕΙΑΚΗΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ



**Η ΠΑΙΔΕΙΑ ΣΤΗΝ ΚΟΡΥΦΗ**  
Επιχειρησιακό Πρόγραμμα  
Εκπαίδευσης και Αρχικής  
Επαγγελματικής Κατάρτισης



**ΑΝΑΜΟΡΦΩΣΗ ΠΡΟΠΤΥΧΙΑΚΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΟΣ ΣΠΟΥΔΩΝ**  
**ΦΑΣΗ Β' – CASE STUDIES ΕΦΑΡΜΟΓΗΣ ΕΜΠΟΡΙΚΟΥ**  
**ΛΟΓΙΣΜΙΚΟΥ ΣΤΗΝ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ**

**ΑΝΑΛΥΣΗ ΒΙΟΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΣΩΛΗΝΩΣΕΩΝ ΜΕ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΑ**  
**ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΜΕ ΤΗΝ ΒΟΗΘΕΙΑ ΤΟΥ ΛΟΓΙΣΜΙΚΟΥ ABAQUS**

**ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ:**  
**ΠΑΤΡΙΚΙΑ ΠΑΠΠΑ**

**ΒΟΛΟΣ 2008**

Βασικός στόχος της προσπάθειας αυτής, στο πλαίσιο του έργου «Αναμόρφωση του Προπτυχιακού Προγράμματος Σπουδών», είναι η εισαγωγή καινούριων μεθόδων διδασκαλίας, όπου με τη χρήση ηλεκτρονικών υπολογιστών να μπορούν οι φοιτητές να πειραματίζονται στην επίλυση προβλημάτων με πεπερασμένα στοιχεία.

Η συγκεκριμένη εργασία έχει ως σκοπό να εισάγει τον χρήστη στην έννοια των πεπερασμένων στοιχείων και την επίλυση των προβλημάτων αυτών με την βοήθεια του λογισμικού Abaqus. Γίνεται μία αναφορά σε κάποιες από τις δυνατότητες του προγράμματος, θέλοντας να εισάγουμε τον φοιτητή σε κάποιες απλές εφαρμογές του προγράμματος. Θα πρέπει να σημειωθεί πως η ευκολία στη χρήση του ABAQUS βασίζεται στον μεγαλύτερο βαθμό στη σωστή χρήση των manuals, τα οποία είναι ιδιαίτερα αναλυτικά και εύχρηστα. Όλες οι εντολές που αναφέρονται, όπως και όλη η βιβλιοθήκη με τα εγχειρίδια χρήσης του Abaqus είναι προσβάσιμα και σε ηλεκτρονική μορφή.

## ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

1.	ΕΙΣΑΓΩΓΗ .....	4
2.	ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΥΠΟΒΑΘΡΟ.....	6
2.1	Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ.....	6
2.2	ΒΑΣΙΚΑ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΤΟΥ ΛΟΓΙΣΜΙΚΟΥ ABAQUS .....	7
3.	ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΣΤΟ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝ ΤΟΥ ABAQUS/CAE.....	9
3.1	ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ ΜΟΝΤΕΛΟΥ.....	10
3.2	ΥΛΙΚΑ - ΔΙΑΤΟΜΕΣ .....	12
3.3	ΣΥΝΟΡΙΑΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ – ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΕΞΩΤΕΡΙΚΩΝ ΔΥΝΑΜΕΩΝ .....	15
3.4	ΕΠΙΛΟΓΗ ΠΛΕΓΜΑΤΟΣ – ΕΠΙΛΥΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ .....	17
4.	ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ.....	20
5.	ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ .....	32
	ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ .....	37
	ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ.....	33

## 1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Τα καμπύλα τμήματα σωληνώσεων χρησιμοποιούνται ευρέως σε βιομηχανικές εφαρμογές, όπως για παράδειγμα σε διηλυστήρια, σε χημικές βιομηχανίες, στους πυρηνικούς αντιδραστήρες, στην μεταφορά πετρελαίου και φυσικού αερίου, και υπόκεινται σε σημαντικά θερμικά και μηχανικά φορτία. Η ανάπτυξη κωδικών (προδιαγραφών) σχεδιασμού και μέτρων ασφάλειας για τις βιομηχανίες, όπου η δομική ακεραιότητα είναι ύψιστης σημασίας, έχει υπογραμμίσει την ανάγκη για εφαρμόσιμους καθώς και συντηρητικούς τύπους για το σχεδιασμό τους έναντι δομικής αστοχίας. Η παρούσα εργασία εστιάζει στην ανάλυση τάσεων σε καμπύλα τμήματα σωλήνων (elbows), στον υπολογισμό δεικτών τάσεων και συντελεστών ευκαμψίας που αναπτύσσονται, καθώς και την παραμόρφωση της διατομής των elbows κατά τις επιδράσεις των καμπτικών φορτίων, εντός και εκτός επιπέδου του σωλήνα, σε σχετικά λεπτούς σωλήνες, χρησιμοποιώντας διαθέσιμες αναλυτικές λύσεις καθώς και αριθμητικές μεθόδους.

Η ανάλυση των τάσεων σε καμπύλους σωλήνες έχει αποτελέσει το αντικείμενο πολλών θεωρητικών και πειραματικών μελετών. Η πρώτη θεωρητική ανάλυση τάσεων σε καμπύλα τμήματα σωληνώσεων, που υπόκεινται σε κάμψη εντός του επιπέδου τους, με την προσέγγιση της ελαχιστοποίησης της δυναμικής ενέργειας, όπως προαναφέρθηκε, αναπτύχθηκε από τον Von Karman (1911). Αργότερα ο Vigness (1943) γενίκευσε τη θεωρία του Von Karman περιλαμβάνοντας την κάμψη εκτός του επιπέδου των σωλήνων. Οι Kafka and Dunn (1955) ενσωμάτωσαν στην παραπάνω θεωρία και την επιρροή της εσωτερικής πίεσης. Οι Rodabaugh and George (1957) πρότειναν την ευρύτατα χρησιμοποιημένη προσέγγιση στην γραμμική ανάλυση της κάμψης σωλήνα. Οι Dodge and Moore (1972) γενίκευσαν τις αναλύσεις των προαναφερθέντων. Οι ανωτέρω εργασίες αποτελούν τη βάση για τις διατάξεις που ακολουθούνται σήμερα για το σχεδιασμό σωληνώσεων.

Όλες οι παραπάνω θεωρητικές αναλύσεις είναι περιορισμένες, λόγω των διάφορων υποθέσεων και προσεγγίσεων που γίνονται στη διατύπωση του προβλήματος. Εξαιτίας αυτών των προσεγγίσεων και των δυσκολιών, έχουν

αναπτυχθεί υπολογιστικές μέθοδοι, που συνέβαλαν στην αριθμητική προσομοίωση και τον υπολογισμό της απόκρισης των καμπύλων σωλήνων. Η μέθοδος πεπερασμένων στοιχείων απεικονίζει μια γενική πλήρη προσέγγιση για την λύση του προβλήματος. Η μέθοδος πεπερασμένων στοιχείων απεικονίζει μια γενική πλήρη προσέγγιση για την λύση του προβλήματος. Ο Margal (1967), ο Hibbit (1973) και άλλοι πρότειναν το πεπερασμένο στοιχείο για την ανάλυση των τάσεων σε σωλήνες, συνδυάζοντας τη θεωρία καμπύλων δοκών με τη θεωρία κελυφών. Αργότερα οι Ohtsubo and Watanabe (1978) καθώς και οι Hibbit and Leung (1981) παρουσίασαν μία κατηγορία πεπερασμένων στοιχείων, που προτείνονται για μοντέλα λεπτότοιχων σωλήνων, βασιζόμενη σε έναν συνδυασμό πολυωνυμικών παρεμβολών Fourier και Hermite γύρω και κατά μήκος του σωλήνα, αντίστοιχα. Οι Natarajan and Blomfield (1975) χρησιμοποίησαν ένα αυθαίρετο διαμορφωμένο στοιχείο κυρτού κελύφους, για να αντιγράψουν την συμπεριφορά κατά την κάμψη του σωλήνα. Ο Sobel (1977) χρησιμοποίησε δύο υπολογιστικά πακέτα, ELBOW και MARC, και σύγκρινε αποτελέσματα για τους συντελεστές ευκαμψίας και συγκέντρωσης τάσεων με τα αναλυτικά αποτελέσματα. Σε πιο πρόσφατες δημοσιεύσεις έχουν αναπτυχθεί αρκετά στοιχεία για ειδικές χρήσεις, τα οποία συνδυάζουν την παραμόρφωση της διατομής με τη διαμήκη παραμόρφωση του ευθύγραμμου τμήματος. Αρκετά από αυτά τα στοιχεία περιλαμβάνονται σήμερα σε εμπορικά υπολογιστικά πακέτα όπως το Abaqus ή το ADINA.

Η παρούσα μελέτη παρουσιάζει την κατανομή των τάσεων και τους συντελεστές ευκαμψίας που αναπτύσσονται στα καμπύλα τμήματα σωλήνων (elbows), καθώς και την παραμόρφωση της διατομής των elbows κατά τις επιδράσεις των καμπτικών φορτίων, εντός και εκτός επιπέδου του σωλήνα, και της εσωτερικής πίεσης, σε σχετικά λεπτούς σωλήνες, χρησιμοποιώντας διαθέσιμες αναλυτικές λύσεις καθώς και σύγκριση των λύσεων αυτών, με πειραματικά αποτελέσματα και αριθμητικά αποτελέσματα από το υπολογιστικό πακέτο πεπερασμένων στοιχείων (Abaqus).

## **2. ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΥΠΟΒΑΘΡΟ**

### **2.1 Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ**

Η μέθοδος πεπερασμένων στοιχείων είναι μία εύρωστη αριθμητική μέθοδος για τη λύση μηχανικών προβλημάτων. Η θεμελιώδης αρχή της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων βασίζεται στην αντικατάσταση του μαθηματικά σύνθετου προβλήματος συννοριακών τιμών με ένα ισοδύναμο διακριτό σύστημα. Η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων, αν και εφαρμόστηκε αρχικά για την στατική ανάλυση φορέων, έχει εφαρμογή σε μία ευρύτερη κατηγορία προβλημάτων του μηχανικού όπως για παράδειγμα στη ρευστομηχανική, στη μεταφορά θερμότητας, στην εμβιομηχανική. Το υπολογιστικό πακέτο που χρησιμοποιείται στο Εργαστήριο Μηχανικής και Αντοχής των Υλικών του τμήματος Μηχανολόγων Μηχανικών Βιομηχανίας του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας για την αριθμητική προσομοίωση γραμμικών και μη γραμμικών προβλημάτων με την χρήση πεπερασμένων στοιχείων, είναι το Abaqus. Το Abaqus είναι ένα γενικό πρόγραμμα πεπερασμένων στοιχείων που δίνει τη δυνατότητα στον χρήστη να προσομοιώσει πολύπλοκες κατασκευές υπό τις επιδράσεις εξωτερικών φορτίσεων σε στατικά καθώς και σε δυναμικά προβλήματα. Οι δυνατότητες του υπολογιστικού αυτού πακέτου είναι πολλές καθώς περιέχει εκτεταμένη βιβλιοθήκη στοιχείων, μεταξύ των άλλων περιλαμβάνονται συνεχή στοιχεία, στοιχεία δοκού, στοιχεία κελύφους και πλάκας, βιβλιοθήκη υλικών που περιλαμβάνει τα συνήθη ελαστικά και ελαστοπλαστικά υλικά, συμπαγή, εφάδους και πολλά ακόμα. Επίσης έχει τη δυνατότητα να μοντελοποιήσει ένα μεγάλο αριθμό από ενδιαφέροντα φαινόμενα, όπως προβλήματα λυγισμού, ταλαντώσεων, αλληλεπιδράσεις μεταξύ στερεών αλλά και στερεών με ρευστά καθώς και πολλά άλλα προβλήματα. Το Abaqus βασίζεται σε μία πολύ καλή πλατφόρμα, και για το λόγο αυτό χρησιμοποιείται από ευρύ φάσμα βιομηχανιών, συμπεριλαμβανομένων των κατασκευαστών αεροσκαφών, εταιρίες αυτοκινήτων, εταιρίες πετρελαίου και της μικροηλεκτρονικής βιομηχανίας, καθώς σε εθνικά εργαστήρια και ερευνητικά πανεπιστήμια.

## 2.2 ΒΑΣΙΚΑ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΤΟΥ ΛΟΓΙΣΜΙΚΟΥ ABAQUS

Η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων είναι μία προσεγγιστική μέθοδος και ως εκ τούτου χρειάζεται κάποια κριτήρια ελέγχου της ποιότητας των αποτελεσμάτων δεδομένου ότι η ακριβής αναλυτική λύση του προβλήματος δεν είναι γνωστή.

Στην περίπτωση της αναλύσεως των κατασκευών, η μέθοδος ακολουθεί τα εξής στάδια, πρώτον μετάβαση από το φυσικό πρόβλημα στο μαθηματικό προσομοίωμα. Κατά το στάδιο αυτό γίνεται η εξιδανίκευση της κατασκευής ως προς τη μορφή και τη δομητική λειτουργία των μελών της. Ταξινομούνται τα μέλη (π.χ. ράβδοι δικτυώματος ή δοκού, σε διδιάστατα μέλη τοιχίων, δίσκων ή πλακών, σε κελύφη και σε τριδιάστατα μέλη). Καθορίζονται οι ιδιότητες των υλικών μελών της κατασκευής καθώς και της συμπεριφορά τους κατά τη φόρτιση της κατασκευής (γραμμικώς ελαστικά, ανελαστικά κλπ). Προσδιορίζονται τα φορτία της κατασκευής και οι συνοριακές συνθήκες (δεσμευμένες μετατοπίσεις). Το μαθηματικό προσομοίωμα διέπεται από τις διαφορικές εξισώσεις ισορροπίας και τις αντίστοιχες συνοριακές συνθήκες. Εν συνεχεία γίνεται μετάβαση από το μαθηματικό προσομοίωμα στο προσομοίωμα πεπερασμένων στοιχείων. Κατά το στάδιο αυτό γίνεται η επιλογή των πεπερασμένων στοιχείων για την προσφορότερη προσομοίωση των μελών του φορέα. Μορφώνεται το δίκτυο των πεπερασμένων στοιχείων για όλα τα μέλη του φορέα. Υπολογίζονται τα μητρώα δυσκαμψίας και οι ισοδύναμες δράσεις των στοιχείων και μορφώνεται η τελική εξίσωση ισορροπίας του φορέα. Τέλος γίνεται η μετάβαση από το προσομοίωμα των πεπερασμένων στοιχείων στο υπολογιστικό προσομοίωμα. Το στάδιο αυτό περιλαμβάνει την αριθμητική επεξεργασία του προσομοιώματος των πεπερασμένων στοιχείων από τον Η/Υ.

Με την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων επιτυγχάνεται μία προσεγγιστική λύση του μαθηματικού προσομοιώματος του προβλήματος. Η ακρίβεια της προσέγγισης εξαρτάται από τον τύπο των πεπερασμένων στοιχείων που χρησιμοποιούνται και την πυκνότητα του πλέγματος. Η αποτελεσματική εφαρμογή της μεθόδου εστιάζεται στην αναζήτηση της βέλτιστης διακριτοποίησης

της κατασκευής. Η βέλτιστη διακριτοποίηση δεν αναφέρεται μόνο στο πλήθος και στον τύπο των στοιχείων αλλά και στην βέλτιστη κατανομή της πυκνότητας του πλέγματος στην επιφάνεια ή τον όγκο του φορέα.

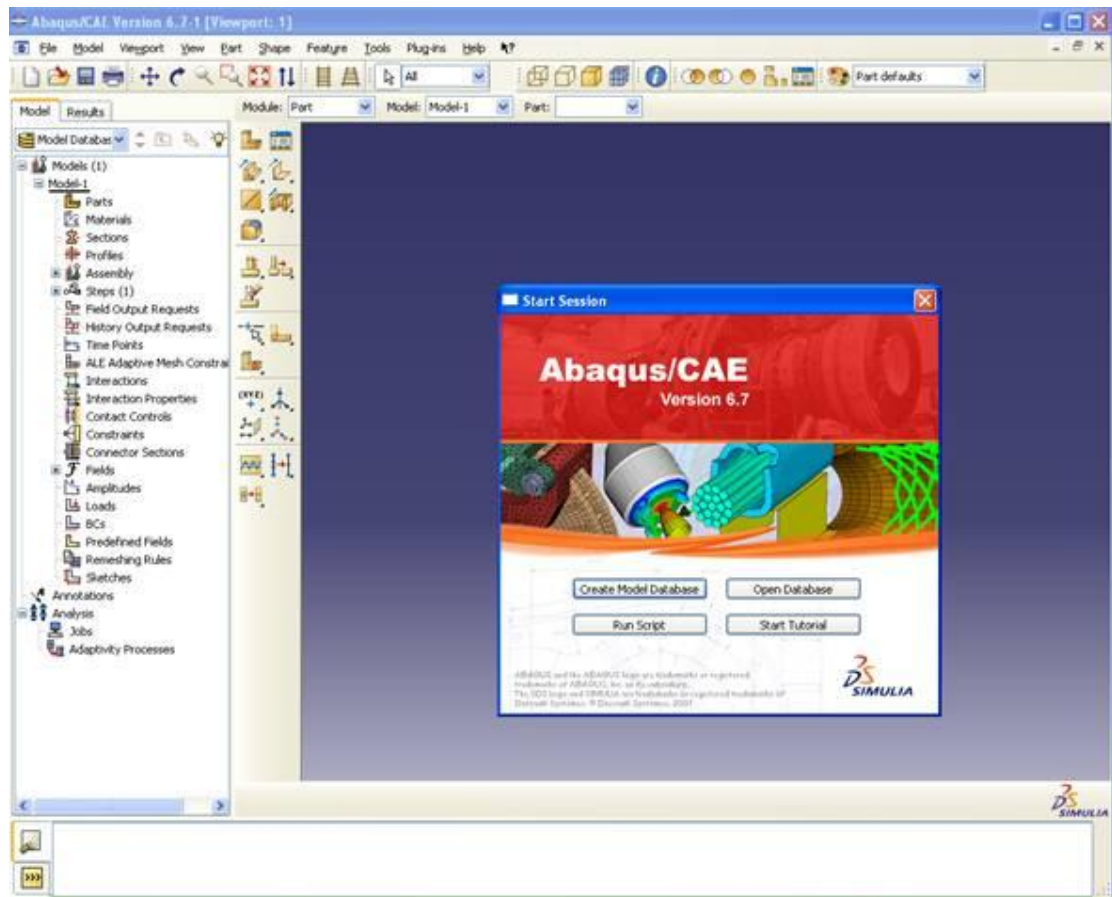


### **3. ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΣΤΟ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝ ΤΟΥ ABAQUS/CAE**

Στην ενότητα αυτή θα παρουσιαστεί ένα πρόβλημα που επιλύθηκε στο εργαστήριο Μηχανικής και Αντοχής των Υλικών του τμήματος Μηχανολόγων Μηχανικών Βιομηχανίας του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας. Τίτλο της εργασίας αυτής είναι «Ανάλυση Τάσεων Βιομηχανικών Σωληνώσεων με πεπερασμένα στοιχεία και αναλυτικές μεθόδους» και σκοπός αυτής, ήταν να παρουσιάσει την κατανομή των τάσεων και τους συντελεστές ευκαμψίας που αναπτύσσονται σε καμπύλα τμήματα σωλήνων (elbows), καθώς και την παραμόρφωση της διατομής των elbows κατά τις επιδράσεις των καμπτικών φορτίων, εντός και εκτός επιπέδου του σωλήνα, και της εσωτερικής πίεσης, σε σχετικά λεπτούς σωλήνες χρησιμοποιώντας τις καλύτερες διαθέσιμες αναλυτικές λύσεις καθώς και σύγκριση των λύσεων αυτών, με πειραματικά αποτελέσματα και αριθμητικά αποτελέσματα από το υπολογιστικό πακέτο πεπερασμένων στοιχείων (Abaqus).

Το Abaqus/CAE παρέχει τη δυνατότητα για μία ολοκληρωμένη προεπεξεργασία (preprocessing) και μετεπεξεργασία (post-processing) της ανάλυσης του μοντέλου. Πρόκειται για ένα λογισμικό του Abaqus, το οποίο παρέχει τη δυνατότητα να γίνει με απλό, άμεσο και γραφικό τρόπο η προσομοίωση του μοντέλου, η ανάλυση αυτού, αλλά και η απεικόνιση και αξιολόγηση των αποτελεσμάτων.

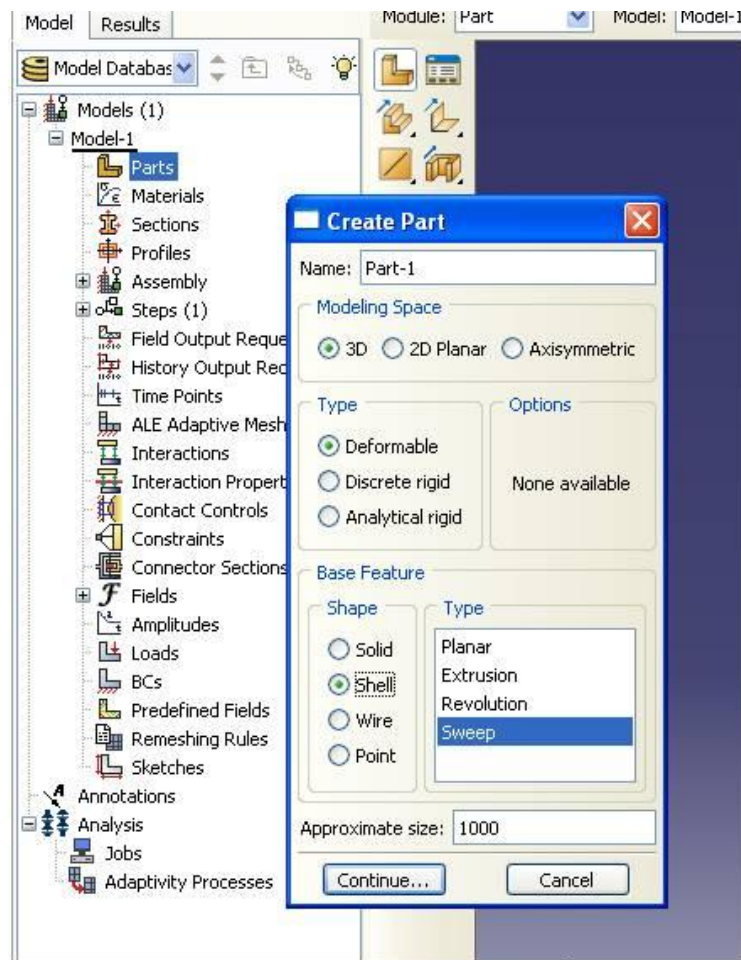
Οι δυνατότητες που παρέχονται από το πρόγραμμα είναι πολλές και δεν μπορούν να αναφερθούν όλες σε αυτήν την αναφορά, αλλά θα γίνει μία εκτενής περιγραφή σε πολλές από αυτές. Καταρχάς, πριν την περιγραφή του σχεδιασμού του μοντέλου, πρέπει να σημειωθεί πως το Abaqus δεν περιέχει μονάδες μέτρησης (π.χ. N, m, sec, κλπ), γι' αυτό οι μονάδες που χρησιμοποιούνται θα πρέπει να εντάσσονται στο ίδιο σύστημα. Έτσι αν οι διαστάσεις μήκους εισάγονται σε μέτρα (m), τότε και οι υπόλοιπες μονάδες θα πρέπει να αναφέρονται στο S.I., και τα αποτελέσματα θα δίνονται στις αντίστοιχες μονάδες.



Εικόνα 1: Το περιβάλλον του Abaqus/CAE

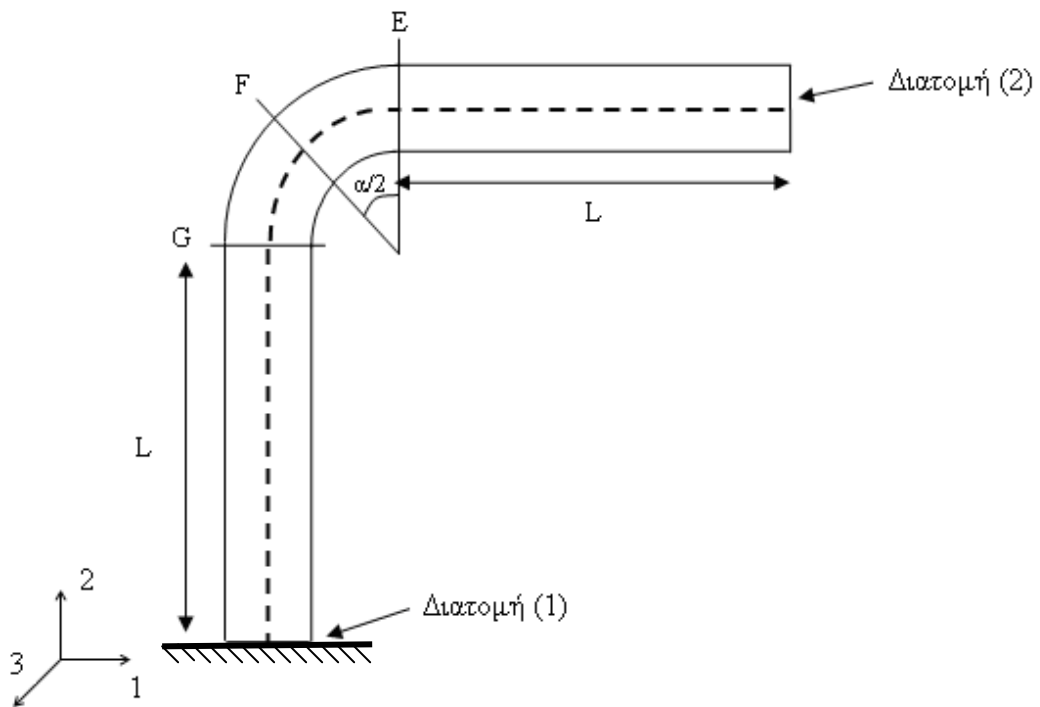
### 3.1 ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ ΜΟΝΤΕΛΟΥ

Όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, το πρόγραμμα έχει τη δυνατότητα να προσομοιώνει διαφορετικά υλικά. Αρχικά η εντολή Part δίνει τη δυνατότητα να σχεδιάσουμε το μοντέλο (create part). Όπως φαίνεται και στην εικόνα υπάρχει η δυνατότητα επιλογής να είναι το μοντέλο τριδιάστατο ή διδιάστατο καθώς και αξονοσυμμετρικό. Επίσης αν είναι παραμορφώσιμο ή απαραμόρφωτο και ποια είναι τα χαρακτηριστικά του (solid, shell, wire, point). Εν συνέχεια μπορεί να σχεδιαστεί το μοντέλο δίνοντας την γεωμετρία του, προσέχοντας κάθε φορά τις μονάδες που χρησιμοποιούνται.



**Εικόνα 2:** Σχεδιασμός του μοντέλου

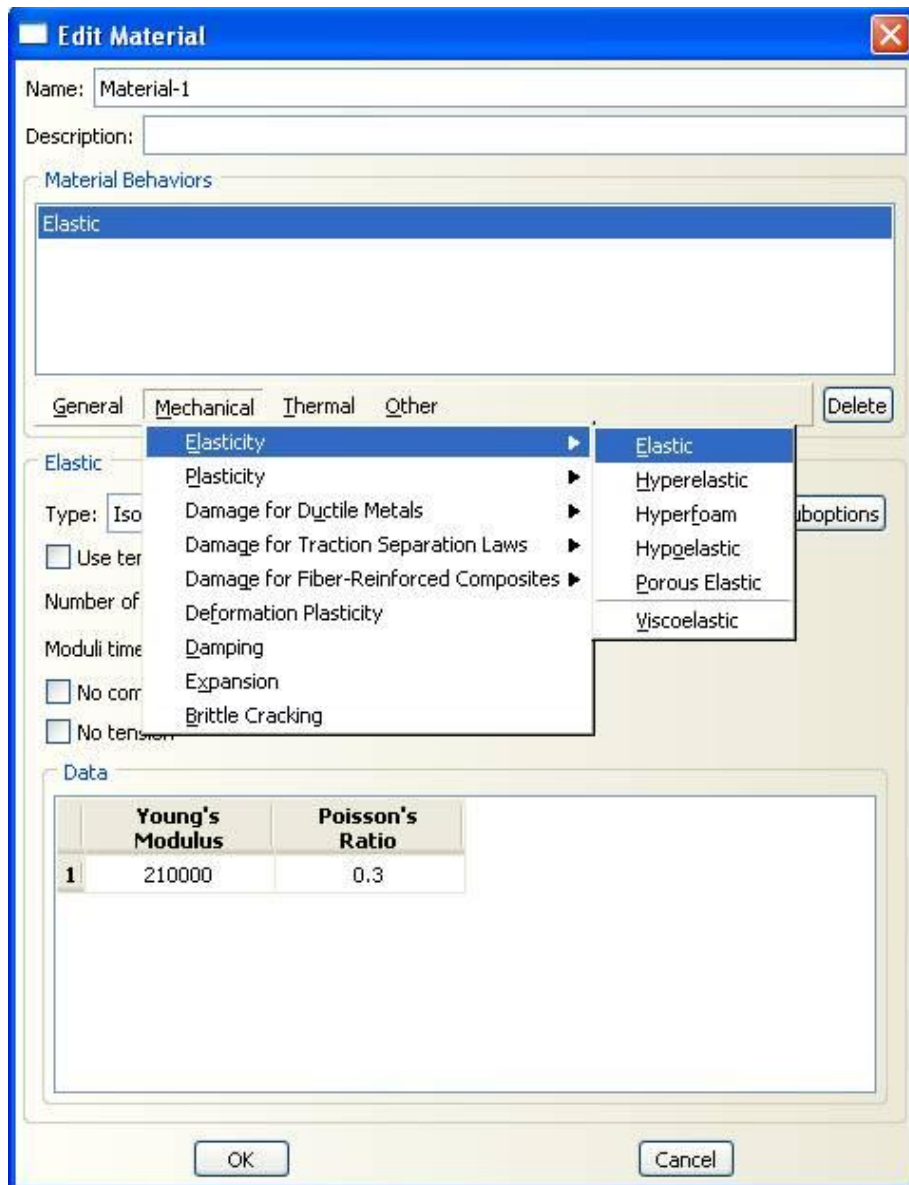
Τα μοντέλα, που αναπτύχθηκαν προσομοιώνουν ένα καμπύλο σωλήνα συνολικής γωνίας  $\alpha = 90^\circ$ , που συνδέεται με δύο ευθύγραμμα τμήματα (Εικόνα 3). Τα ευθύγραμμα και το καμπύλο τμήμα (elbow) των σωλήνων έχουν ομοιόμορφο πάχος  $t = 3 \text{ mm}$  και μέση διάμετρο σωλήνα  $D_m = 162 \text{ mm}$ . Η διαμήκης ακτίνα καμπυλότητας  $R$  του άξονα των σωλήνων είναι ίση με  $480 \text{ mm}$ .



**Εικόνα 3:** Γενική μορφή και χαρακτηριστικά μεγέθη του μοντέλου προσομοίωσης

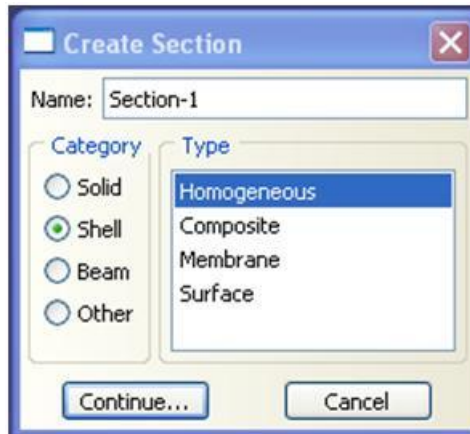
### 3.2 ΥΛΙΚΑ - ΔΙΑΤΟΜΕΣ

Στη συνέχεια καθορίζονται οι ιδιότητες των υλικών των μελών της κατασκευής καθώς και η συμπεριφορά τους κατά τη φόρτιση της κατασκευής (γραμμικώς ελαστικά, ανελαστικά κλπ).



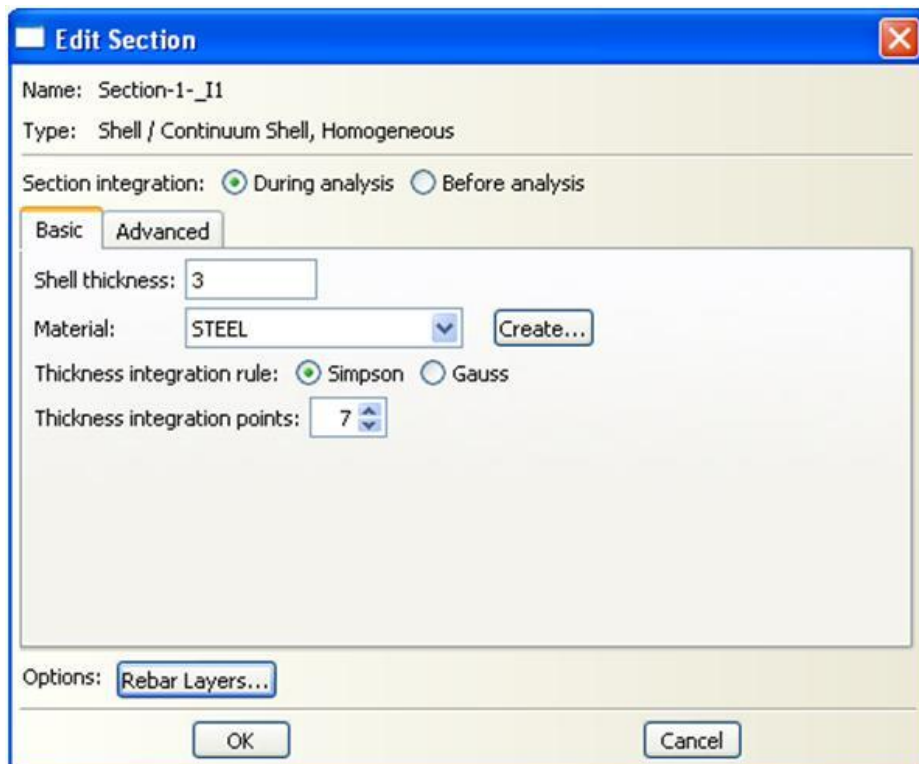
**Εικόνα 4:** Επιλογή των υλικών των μελών του μοντέλου

Έπισης δίνεται η δυνατότητα να επιλεγεί η διατόμη που θα έχει το μοντέλο από τις βιβλιοθήκες του προγράμματος.



**Εικόνα 5:** Επιλογή της διατομής του δομικού στοιχείου

Αφού δημιουργηθεί η διατομή του δομικού στοιχείου, μπορεί να οριστεί το πάχος της διατομής, το υλικό και πόσα σημεία ολοκλήρωσης θα έχει το μοντέλο κατά το πάχος, καθώς και τη μέθοδο ολοκλήρωσης που θα χρησιμοποιήσει το πρόγραμμα.

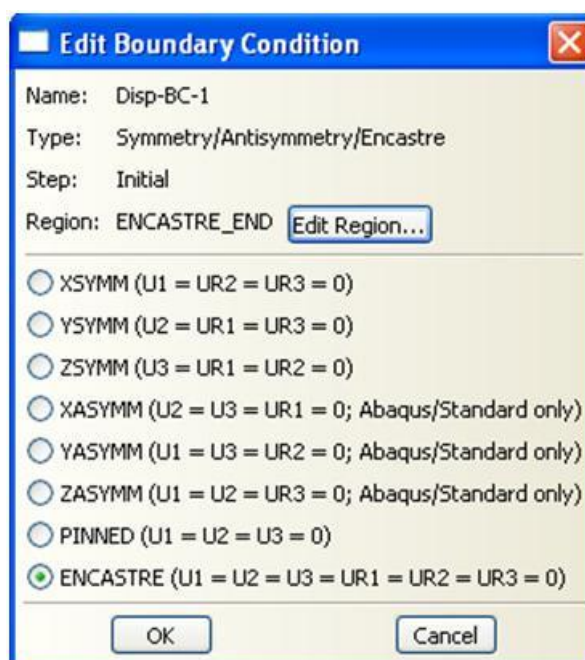


**Εικόνα 6:** Καθορισμός της διατομής του μοντέλου

Το υλικό, στην εργασία, θεωρήθηκε γραμμικά ελαστικό υλικό με μέτρο ελαστικότητας  $E=210000 \text{ GPa}$  και λόγο Poisson  $\nu=0.3$ . Τα ευθύγραμμα και το καμπύλο τμήμα (elbow) των σωλήνων έχουν ομοιόμορφο πάχος  $t=3 \text{ mm}$  και κατά το πάχος χρησιμοποιήθηκαν επτά σημεία ολοκλήρωσης τύπου Simpson.

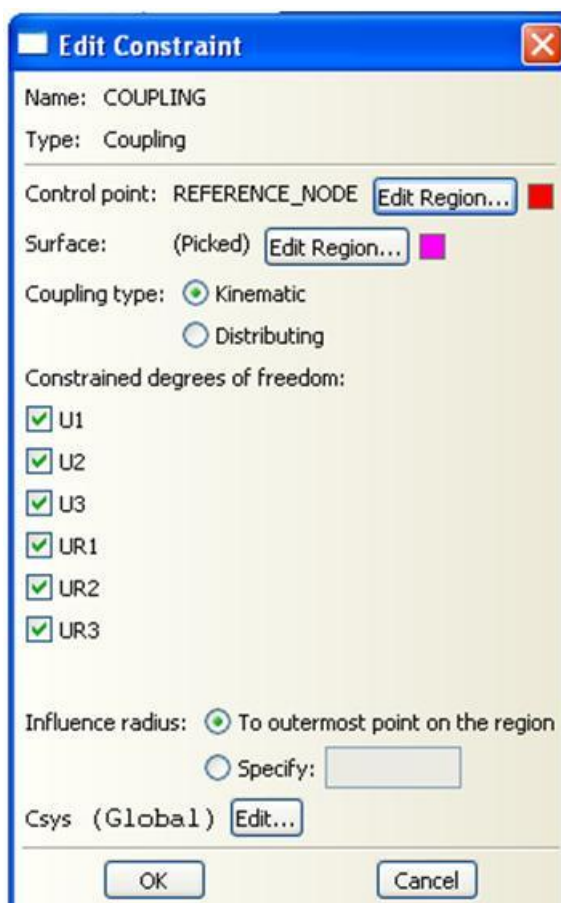
### 3.3 ΣΥΝΟΡΙΑΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ – ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΕΞΩΤΕΡΙΚΩΝ ΔΥΝΑΜΕΩΝ

Στην συνέχεια πρέπει να καθοριστούν τα βήματα (steps) της ανάλυσης που θα ακολουθηθούν. Το Abaqus δημιουργεί αυτόματα το αρχικό βήμα, όπου καθορίζονται οι συνοριακές συνθήκες, ενώ τα υπόλοιπα βήματα, όπου θα οριστούν οι δυνάμεις που ασκούνται στο μοντέλο, δημιουργούνται από τον χρήστη. Αφού οριστούν τα βήματα μπορούν να καθοριστούν οι συνοριακές συνθήκες και τα φορτία του μοντέλου. Οι συνοριακές συνθήκες όπου καθορίζονται στο αρχικό βήμα, μπορούν να εφαρμοστούν σε ένα σύνολο κόμβων ή στοιχείων (το πρόγραμμα δίνει τη δυνατότητα στον χρήστη να ομαδοποιήσει στοιχεία και κόμβους, έτσι ώστε να έχουν κάποια κοινή ιδιότητα). Συνεπώς ενδέχεται σε μία ομάδα στοιχείων ή κόμβων να δεσμευτούν οι μετατοπίσεις ή οι στρόφες καθώς και τα δύο, ανάλογα με τη μορφή του προβλήματος.



Εικόνα 7: Καθορισμός συνοριακών συνθηκών στο μοντέλο

Στο συγκεκριμένο πρόβλημα, το ένα άκρο του σωλήνα είναι πακτωμένο (διατομή 1) (Εικόνα 3). Συνεπώς σε μία ομάδα κόμβων, η οποία έχει ονομαστεί ENCASTRE (Εικόνα 7) και είναι οι κόμβοι της διατομής 1, έχουν δεσμευτεί οι μετατοπίσεις και οι στροφές και στις τρεις διευθύνσεις.

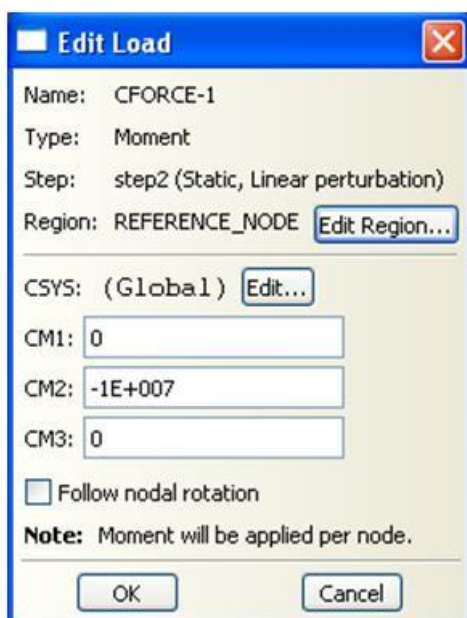


**Εικόνα 8:** Ομαδοποίηση κόμβων. Όλοι οι βαθμοί ελευθερίας των κόμβων κινούνται σύμφωνα με την κίνηση ενός κόμβου αναφοράς

Οι δυνάμεις που εφαρμόζονται στο μοντέλο, μπορούν να οριστούν σε διαφορετικά βήματα και μπορούν να είναι μία συγκεντρωμένη δύναμη ή μία ροπή σε ένα κόμβο αναφοράς. Στο συγκεκριμένο πρόβλημα, η ροπή εφαρμόζεται σε συνθήκες πειράματος πάνω σε μία άκαμπτη πλάκα στο ένα άκρο του σωλήνα. Συνεπώς για να προσομοιωθεί η πραγματική συνοριακή συνθήκη, χρησιμοποιήθηκε η εντολή «Kinematic Coupling», η οποία «συνδέει» όλους τους κόμβους, της ακραίας ελεύθερης διατομής του ευθύγραμμου τμήματος του σωλήνα, σε έναν κόμβο (reference node) του άκρου. Αυτή η σύνδεση εξαναγκάζει όλους τους



βαθμούς ελευθερίας των κόμβων να κινούνται σύμφωνα με την κίνηση του κόμβου αναφοράς. Στη διατομή 2 (Εικόνα 3) υποβάλλεται σε συνεπίπεδη καμπτική ροπή  $M$ , (η οποία είναι θετική όταν τείνει να μειώσει την ακτίνα καμπυλότητας  $R$ , «κλείνουσα» ροπή) καθώς και σε αντιεπίπεδη κάμψη. Η ροπή εφαρμόστηκε γύρω από τον άξονα 3, για την συνεπίπεδη κάμψη, και γύρω από τον άξονα 2 για την αντιεπίπεδη κάμψη στον κόμβο αναφοράς (Εικόνα 9). Ο κόμβος αναφοράς έχει δεσμευμένους όλους τους βαθμούς ελευθερίας του εκτός των μετατοπίσεων 1, 2 και της στροφής γύρω από τον άξονα 3 για συνεπίπεδη κάμψη.



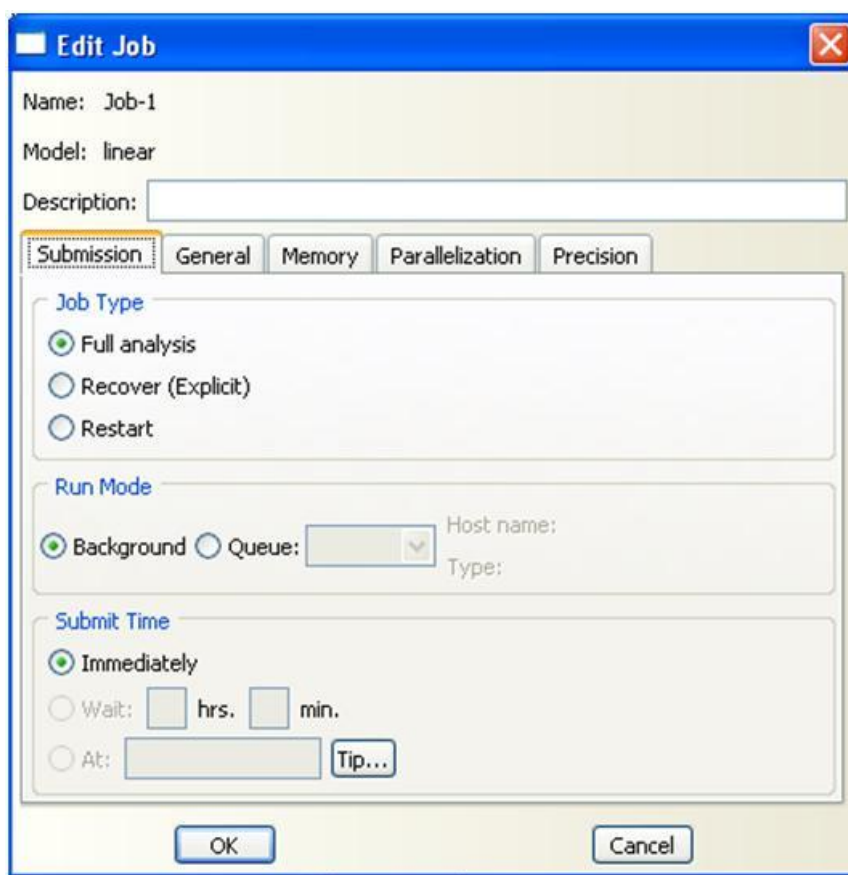
Εικόνα 9: Εφαρμογή ροπής σε έναν κόμβο αναφοράς

### 3.4 ΕΠΙΛΟΓΗ ΠΛΕΓΜΑΤΟΣ – ΕΠΙΛΥΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

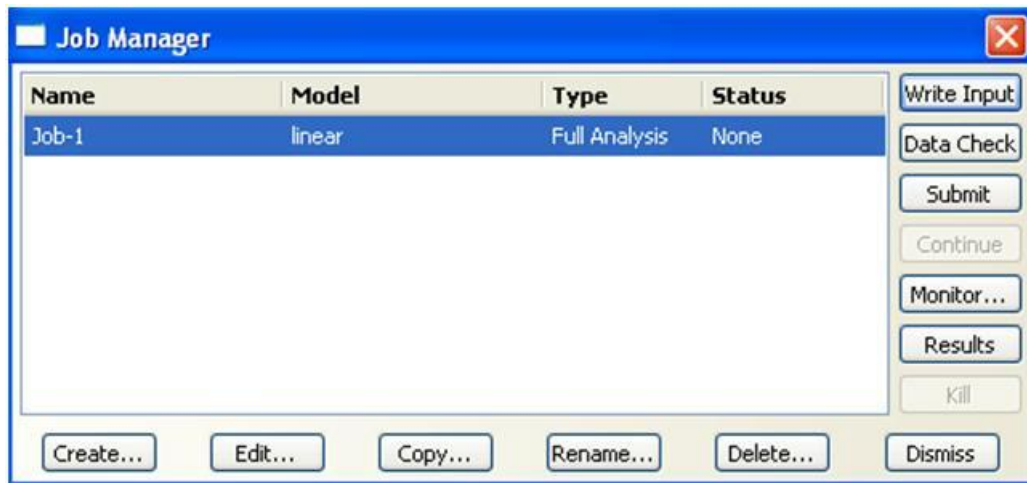
Στο σημείο αυτό πρέπει να οριστεί το πλέγμα των πεπερασμένων στοιχείων που θα εφαρμοστεί στο μοντέλο. Το Abaqus χρησιμοποιεί διάφορες τεχνικές για το πλέγμα. Δίδεται ο αριθμός των στοιχείων σε κάθε διεύθυνση, καθώς και περιοχές με πυκνότερο ή αραιότερο πλέγμα σύμφωνα με τις ανάγκες του προβλήματος και το πρόγραμμα να δημιουργήσει το πλέγμα σύμφωνα με την επιθυμία του χρήστη. Επίσης υπάρχει, όπως προαναφέρθηκε, η δυνατότητα επιλογής των στοιχείων, συνεχή στοιχεία, στοιχεία δοκού, στοιχεία κελύφους και πλάκας, και των κόμβων

αυτών. Ο καμπύλος σωλήνας της εργασίας, προσομοιώθηκε στο ABAQUS με τετρακομβικά στοιχεία κελύφους S4R, μειωμένης ολοκλήρωσης με ένα σημείο ολοκλήρωσης στο επίπεδο. Τα μοντέλα που χρησιμοποιήθηκαν έχουν 96 στοιχεία περιμετρικά και συνολικά 49920 στοιχεία.

Αφού ορίσουμε όλα τα παραπάνω το πρόγραμμα είναι έτοιμο να διεξάγει την ανάλυση, η οποία μπορεί να είναι γραμμική ή μη γραμμική, καθώς να γράψει και ένα αρχείο δεδομένων, όπου βρίσκονται όλα τα δεδομένα του προβλήματος που προσομοιώθηκε. Κατά την ανάλυση του προβλήματος δημιουργούνται διάφορα αρχεία. Από αυτά το αρχείο .odb δείχνει γραφικά τα αποτελέσματα της ανάλυσης, ενώ το αρχείο .dat περιέχει τις πληροφορίες για τις μεταβλητές.



**Εικόνα 10:** Το πρόγραμμα είναι ετοιμό να επεξεργαστεί τα δεδομένα του χρήστη



Εικόνα 11: Δημιουργία αρχείου δεδομένων

#### 4. ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Σε αυτή την ενότητα παρουσιάζεται η παραμετρική μελέτη που έγινε σε μία προσπάθεια να διερευνηθεί πως επηρεάζονται τα αποτελέσματα από το πάχος του σωλήνα και κατά πόσο τα αποτελέσματα που λαμβάνονται από το υπολογιστικό πρόγραμμα συμπίπτουν με τα αποτελέσματα της αναλυτικής λύσης του Rodabaugh and George (1957).

Κατά την προσομοίωση των δύο μοντέλων μελετήθηκαν η παραμόρφωση της διατομής καθώς και το πως αυτή μεταβάλλεται κατά μήκος του σωλήνα, οι τάσεις που αναπτύσσονται κατά μήκος και περιμετρικά του σωλήνα και οι συντελεστές ευκαμψίας, όταν τα μοντέλα υποβάλλονται σε συνεπίπεδη και αντιεπίπεδη κάμψη. Θα πρέπει να αναφερθεί ότι τα δύο δοκίμια υποβλήθηκαν σε καμπτική ροπή μεγέθους 10 kN-m που εφαρμόστηκε ως συγκεντρωμένο φορτίο πάνω στον κεντρικό κόμβο της ελεύθερης διατομής.

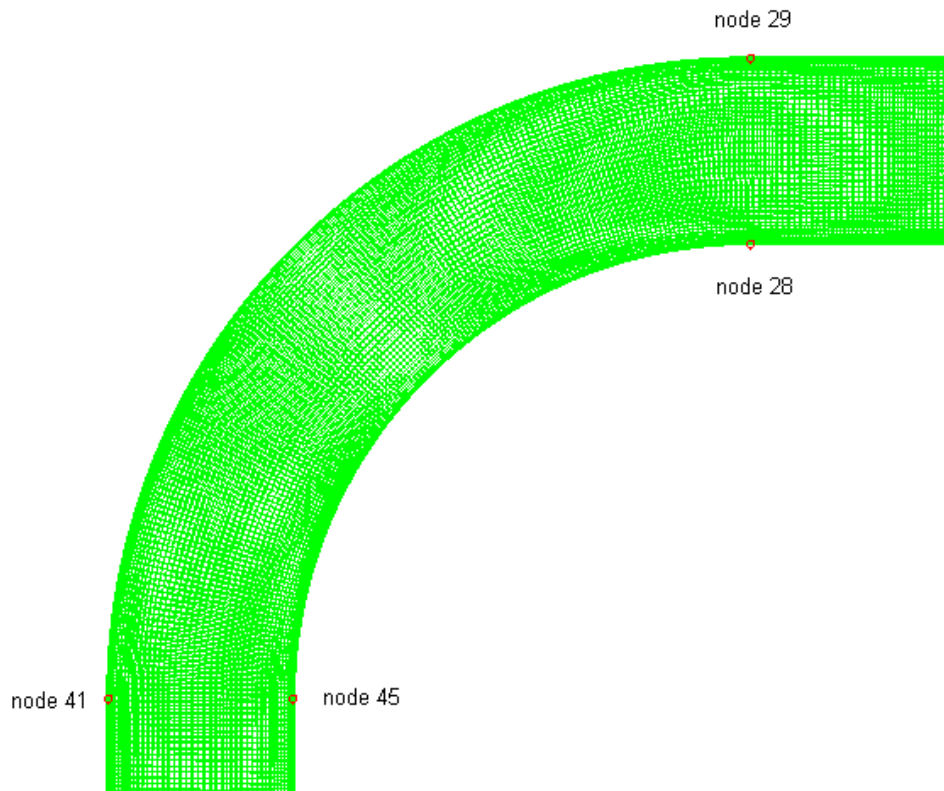
Αρχικά υπολογίζεται η στροφή  $\Delta\Phi$  ως η σχετική στροφή των διαμέτρων στις διατομές G και E, που βρίσκονται πάνω στο επίπεδο της κάμψης, θεωρώντας τους κόμβους (41,45) και (28,29) αντίστοιχα (εικόνα 12). Τα αριθμητικά αποτελέσματα δείχνουν

$$\Delta\Phi=0.051859$$

Ενώ αναλυτικά, η σχετική στροφή των διατομών είναι

$$\Delta\Phi=0.05402$$

Συγκρίνοντας το αποτέλεσμα των πεπερασμένων στοιχείων με την αναλυτική λύση, παρατηρείται απόκλιση 4%. Αυτή η απόκλιση οφείλεται πιθανώς, στο ότι το μοντέλο, που προσομοιώθηκε με πεπερασμένα στοιχεία, έχει και ευθύγραμμο σωλήνα στο άκρο του οποίου ασκείται η καμπτική ροπή. Σημειώνεται πως η αναλυτική λύση θεωρεί ομοιόμορφα καμπύλο σωλήνα πολύ μεγάλου μήκους. Σε κάθε περίπτωση μπορεί να θεωρηθεί ότι η αριθμητική λύση του βρέθηκε είναι ικανοποιητική σε σχέση με την αναλυτική λύση.



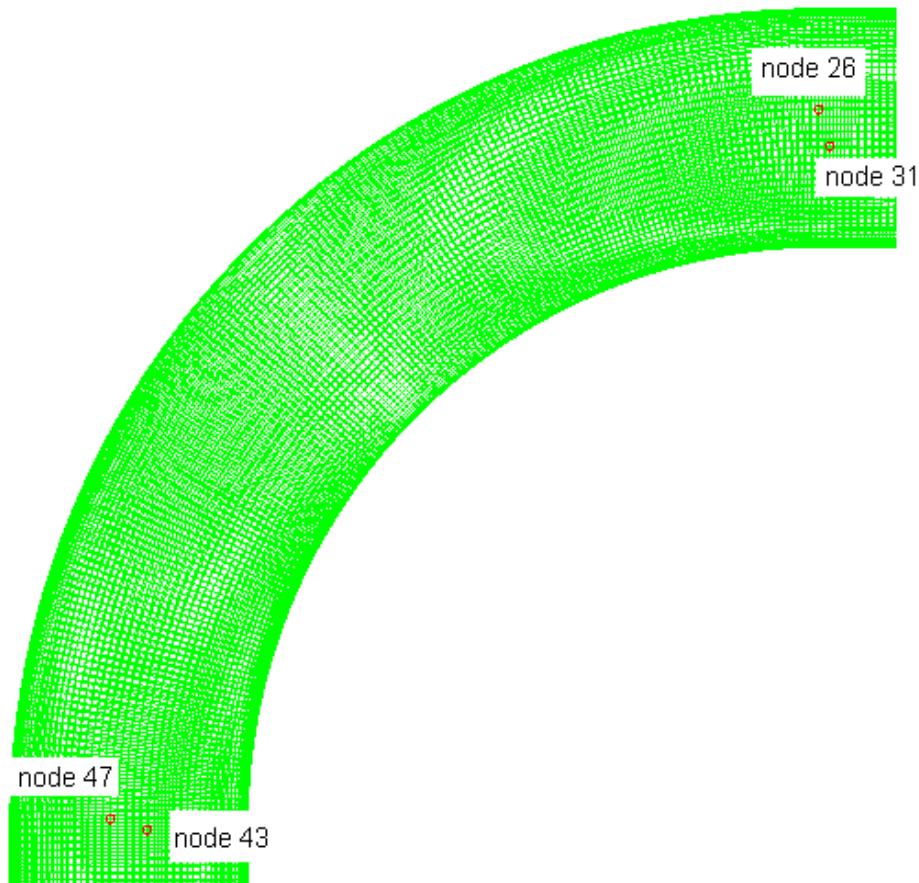
**Εικόνα 12:** Σημεία μέτρησης σχετικής στροφής  $\Delta\Phi$ , για συνεπίπεδη κάμψη

Κατά την αντιεπίπεδη κάμψη η στροφή  $\Delta\Phi$  είναι η σχετική στροφή των διαμέτρων G, E μελετώντας τους κόμβους (47,43) και (26,31) αντίστοιχα (εικόνα 13) και ισούται με:

$$\Delta\Phi=0.040382$$

Ενώ αναλυτικά, η σχετική στροφή των διατομών είναι ίδια με την συνεπίπεδη κάμψη και ίση με

$$\Delta\Phi=0.05402$$



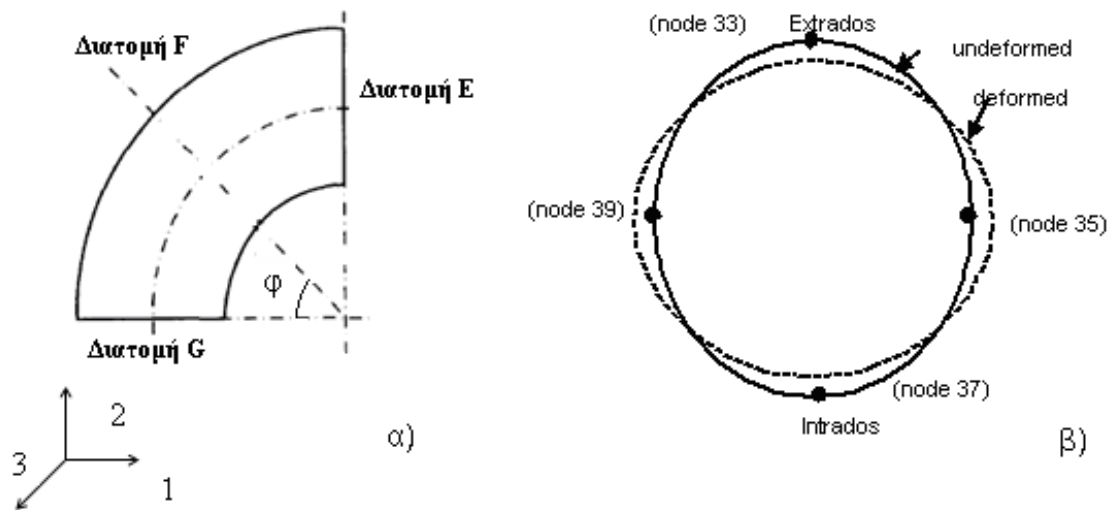
**Εικόνα 13:** Σημεία μέτρησης σχετικής στροφής  $\Delta\Phi$ , για αντεπίπεδη κάμψη

Επίσης στα δύο μοντέλα μελετήθηκε και η παραμόρφωση της διατομής F (εικόνα 14). Το πρόγραμμα δίνει τις μετατοπίσεις  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $u_3$  για κάθε κόμβο. Ο κάθε κόμβος μετατοπίζεται κατά την οριζόντια κατεύθυνση κατά

$$u_x = -u_3$$

ενώ κατά την κατακόρυφη κατά

$$u_y = u_2 \sin\varphi + u_1 \cos\varphi$$



**Εικόνα 14:** α) Καμπύλο τμήμα σωλήνα και β) διατομή F

Συνεπώς οι νέες συντεταγμένες των κόμβων στην παραμορφωμένη κατάσταση δίνονται

$$x^* = x + u_x$$

$$y^* = y + u_y$$

Με βάση τα παραπάνω η παραμόρφωση της διατομής, από τα αποτελέσματα των πεπερασμένων στοιχείων μπορεί να υπολογιστεί με βάση την παράμετρο «ovalization»

$$ov = \frac{D_h - D_v}{2D_m} = 0.041683$$

Σύμφωνα με την αναλυτική λύση οι συντεταγμένες των σημείων μετά την παραμόρφωση δίνονται

$$x^* = (r + w)\cos\varphi - v\sin\varphi \text{ για } \varphi = 0, \pi$$

$$y^* = (r + w)\sin\varphi + v\cos\varphi \text{ για } \varphi = \pi/2, 3\pi/2$$

και το «ovalization» της διατομής είναι ίσο

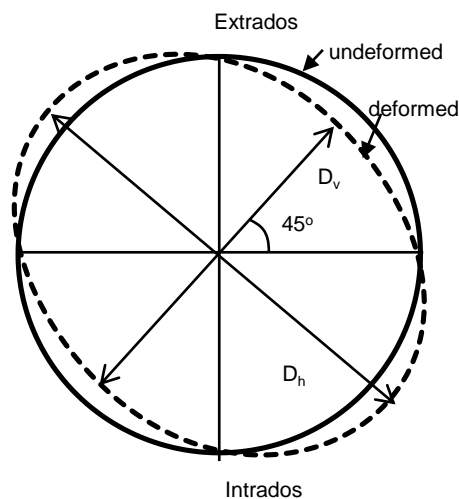
$$ov = \frac{D_h - D_v}{2D_m} = 0.039820$$

Κατά την αντιεπίπεδη κάμψη το κυρτό μέρος του καμπύλο σωλήνα πάλι παραμορφώνεται και αποκτά ένα οβάλ σχήμα, αλλά τώρα οι διάμετροι που το δημιουργούν αυτό, απέχουν  $45^\circ$  από τους κύριους άξονες (εικόνα 15). Με την βοήθεια του υπολογιστικού πακέτου το ovalization για το μοντέλο είναι

$$ov = \frac{D_h - D_v}{2D_m} = 0.027587$$

Θεωρώντας τα ίδια στοιχεία με πριν, αναλυτικά το ovalization είναι

$$ov = \frac{D_h - D_v}{2D_m} = 0.039719$$



**Εικόνα 15:** “Οβαλοποίηση” διατομής σε αντιεπίπεδη κάμψη

Παρατηρούμε ότι υπάρχει μία σημαντική απόκλιση, συγκρίνοντας τα υπολογιστικά αποτελέσματα με τα αναλυτικά. Αυτό οφείλεται στο ότι, καθώς εφαρμόζουμε την καμπτική ροπή, στην διατομή F που μελετάμε την παραμόρφωση μεταφέρεται και μία στρεπτική ροπή  $M_2$ , η οποία επηρεάζει το αποτέλεσμα. Αυτό το γεγονός πρέπει να ληφθεί υπ’ όψη όταν υπολογίζονται οι τάσεις, οι παραμορφώσεις και το «ovalization». Υπολογίζοντας, λοιπόν τις τάσεις με την αναλυτική μέθοδο ως καμπτική ροπή υπολογίζεται μόνο η  $M_1$



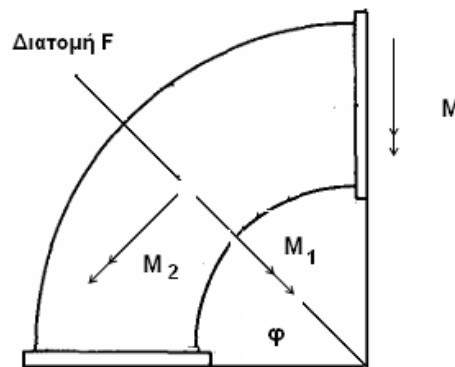
$$M_1 = M \sin \varphi = \frac{\sqrt{2}}{2} M ,$$

για την διατομή F ( $\varphi=45^\circ$ ), (Εικόνα 16).

Με βάση την παραπάνω παρατήρηση το «ovalization» προκύπτει

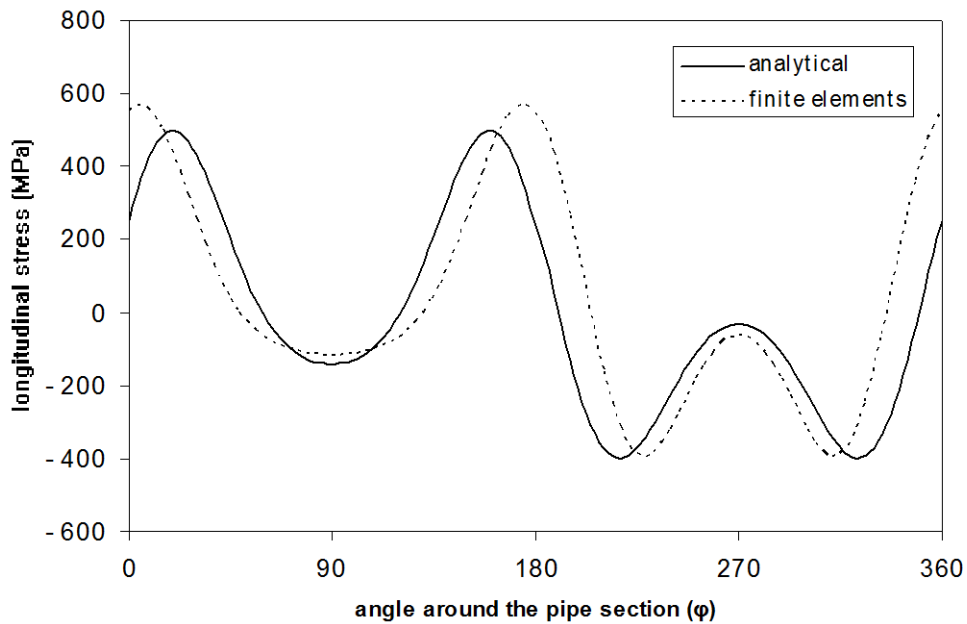
$$ov = \frac{D_h - D_v}{2D_m} = 0.02807$$

που είναι πολύ πιο κοντά στο αποτέλεσμα των πεπερασμένων στοιχείων.

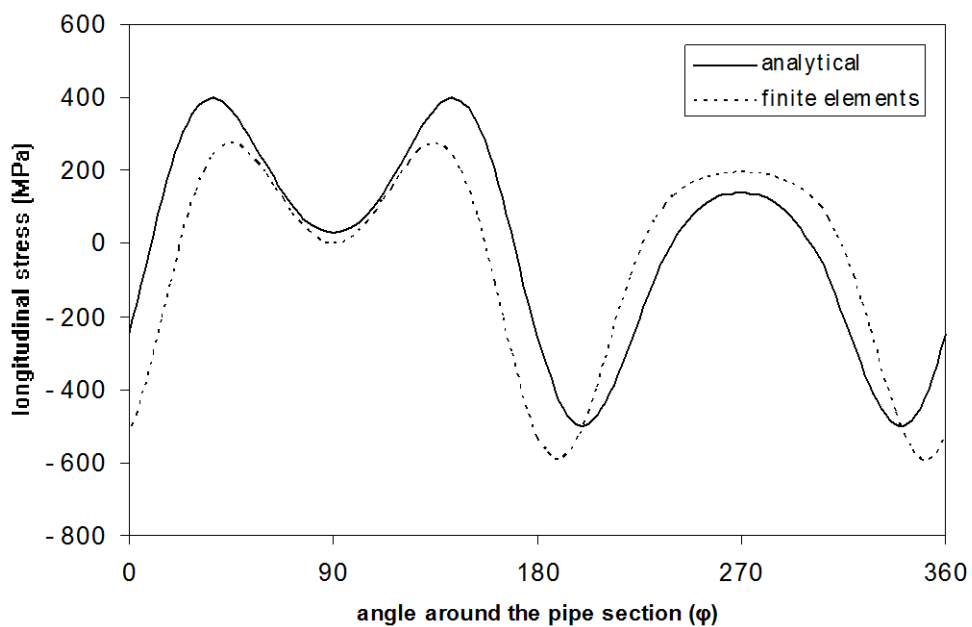


**Εικόνα 16:** Στη διατομή F μεταφέρεται μια καμπτική ροπή  $M_1$  και μία στρεπτική ροπή  $M_2$ , κατά την αντιεπίπεδη κάμψη του δοκιμίου

Τέλος, με την προσομοίωση των πεπερασμένων στοιχείων υπολογίζονται και οι τάσεις που αναπτύσσονται σε κάθε σημείο του μοντέλου. Παρατηρείται ότι οι μέγιστες τάσεις εμφανίζονται σε μία περιοχή κοντά στην διατομή F. Συνεπώς ορίζοντας τους κόμβους της διατομής F ως ένα σύνολο κόμβων, προσδιορίζονται οι τάσεις που αναπτύσσονται σε αυτήν την διατομή. Η ανάλυση δίνει τιμές και την εσωτερική και για την εξωτερική επιφάνεια του σωλήνα. Τα αποτελέσματα συγκρίθηκαν με αυτά των πεπερασμένων στοιχείων και παρουσιάζονται στα σχήματα 17 και 18.



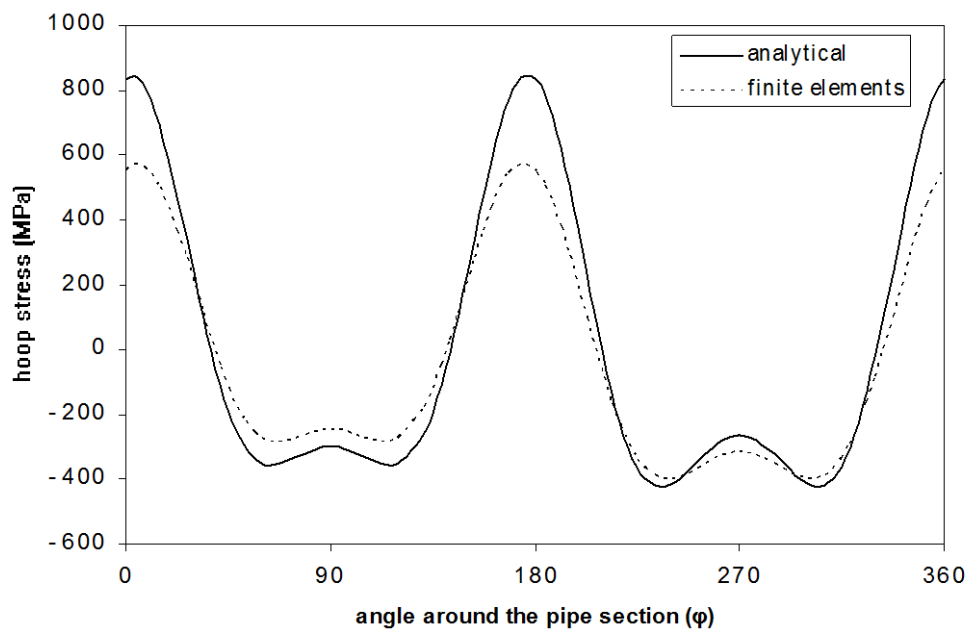
**Εικόνα 17:** Σύγκριση των αναλυτικών με τα αριθμητικά αποτελέσματα πεπερασμένων στοιχείων των διαμήκων τάσεων που αναπτύσσονται στο εξωτερικό μέρος του σωλήνα, για συνεπίπεδη κάμψη,  $M=10 \text{ kN-m}$



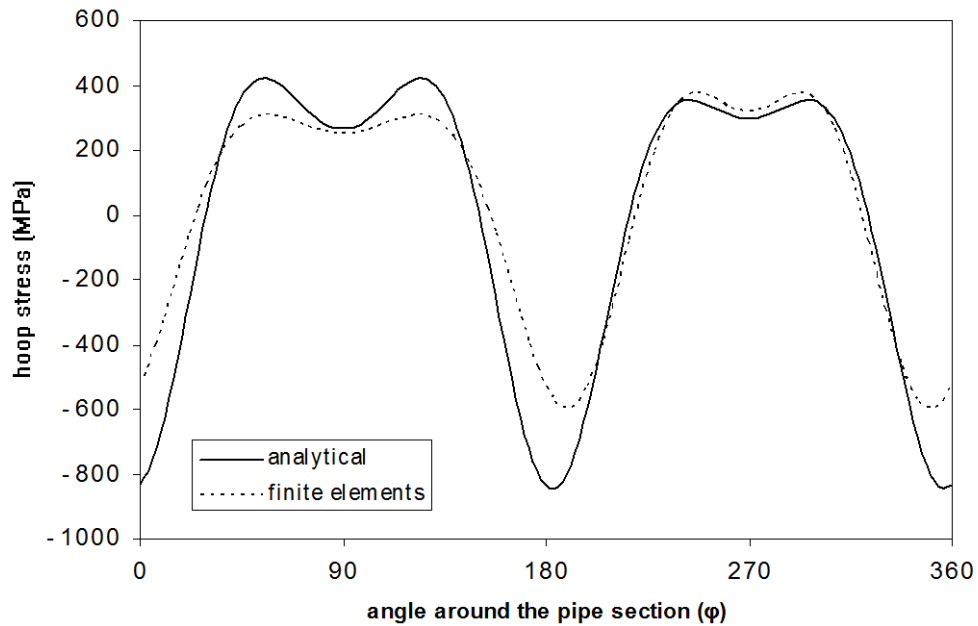
**Εικόνα 18:** Σύγκριση των αναλυτικών με τα αριθμητικά αποτελέσματα πεπερασμένων στοιχείων των διαμήκων τάσεων που αναπτύσσονται στο εσωτερικό μέρος του σωλήνα, για συνεπίπεδη κάμψη,  $M=10 \text{ kN-m}$

Τα αποτελέσματα που προκύπτουν από το μοντέλο των πεπερασμένων στοιχείων συγκλίνουν σε ικανοποιητικό βαθμό με αυτά της αναλυτικής λύσης.

Οι περιμετρικές τάσεις που αναπτύσσονται στην διατομή F, για την εξωτερική και την εσωτερική επιφάνεια του σωλήνα παρουσιάζονται στα σχήματα 19 και 20. Διαπιστώνεται ότι η μέγιστη περιμετρική τάση για ελαστικούς καμπύλους σωλήνες κάτω από συνεπίπεδη κάμψη εμφανίζεται κοντά στην κύρια διάμετρο ( $0^\circ - 180^\circ$ ).



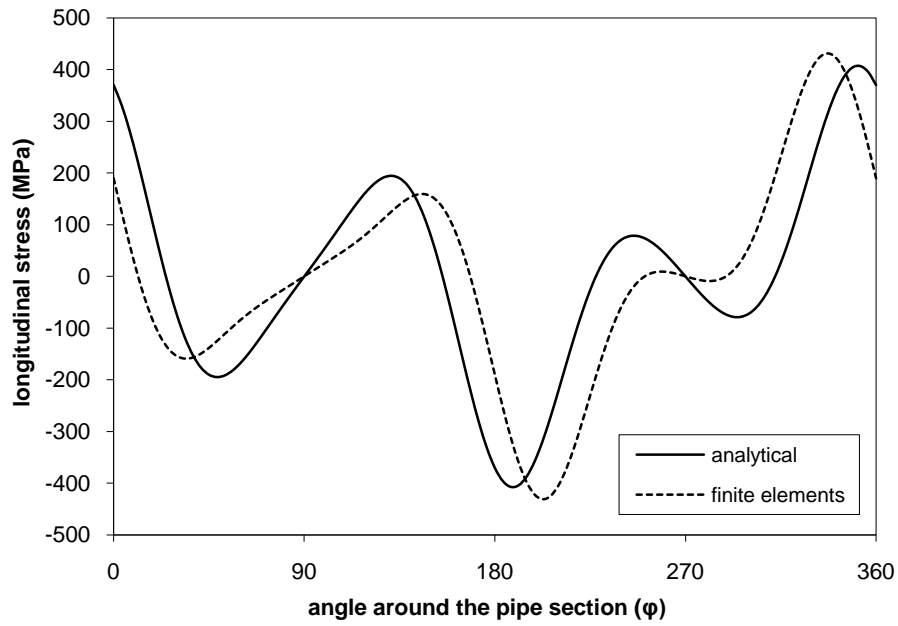
**Εικόνα 19:** Σύγκριση των αναλυτικών με τα αριθμητικά αποτελέσματα πεπερασμένων στοιχείων των περιμετρικών τάσεων που αναπτύσσονται στο εξωτερικό μέρος του σωλήνα, για συνεπίπεδη κάμψη,  $M=10$  kN-m



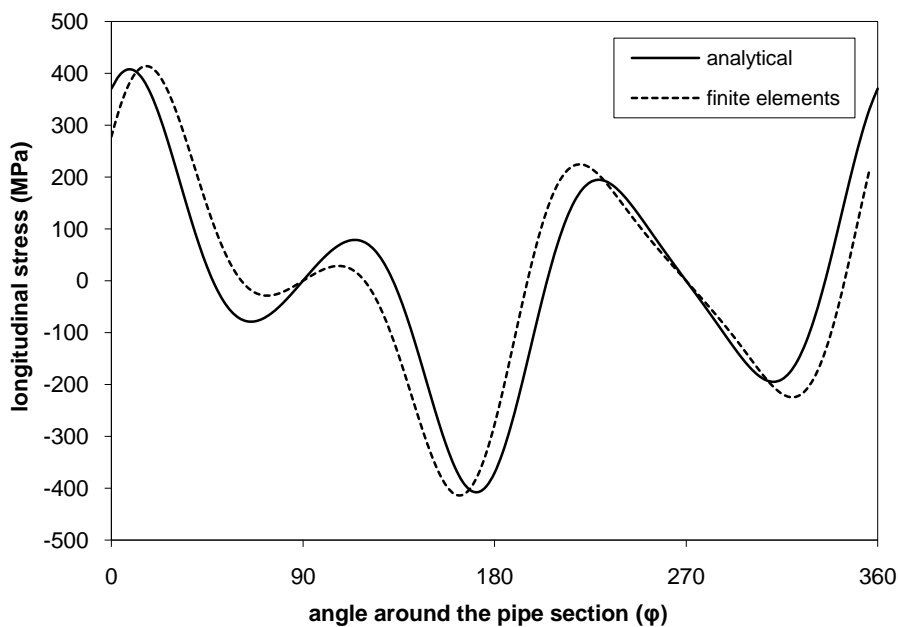
**Εικόνα 20:** Σύγκριση των αναλυτικών με τα αριθμητικά αποτελέσματα πεπερασμένων στοιχείων των περιμετρικών τάσεων που αναπτύσσονται στο εσωτερικό μέρος του σωλήνα, για συνεπίπεδη κάμψη,  $M=10 \text{ kN}\cdot\text{m}$

Από τα αποτελέσματα αυτά, διαπιστώνουμε ότι η μέγιστη περιμετρική τάση εμφανίζεται κοντά στους κόμβους 35,39 ( $\phi=0,\pi$ ), και η οποία είναι μεγαλύτερη από την αντίστοιχη μέγιστη διαμήκη τάση που αναπτύσσεται. Το μέγεθος και η περιμετρική μεταβολή της διαμήκουσ τάσης είναι διαφορετική από αυτήν που αναπτύσσεται στην ευθύγραμμη δοκό. Η τάση στο εσωτερικό και εξωτερικό της καμπτόμενης – αρχικά ευθύγραμμης δοκού είναι μέγιστη σε αντίθεση με τον καμπύλο σωλήνα που είναι μικρή, και αυξάνεται στα σημεία όπου η περιμετρική τάση είναι μέγιστη.

Ομοίως και για την κάμψη εκτός επιπέδου, παρουσιάζονται οι διαμήκεις και περιμετρικές τάσεις. Όπως μπορεί να παρατηρηθεί και στα σχήματα 21 και 22, στον κατακόρυφο άξονα της διατομής είναι μηδέν, ενώ αποκτούν μέγιστη τιμή στην οριζόντια διάμετρο. Παρατηρείται μία αρκετά καλή συμφωνία των αριθμητικών αποτελεσμάτων με τα αποτελέσματα από την προσομοίωση με πεπερασμένα στοιχεία.

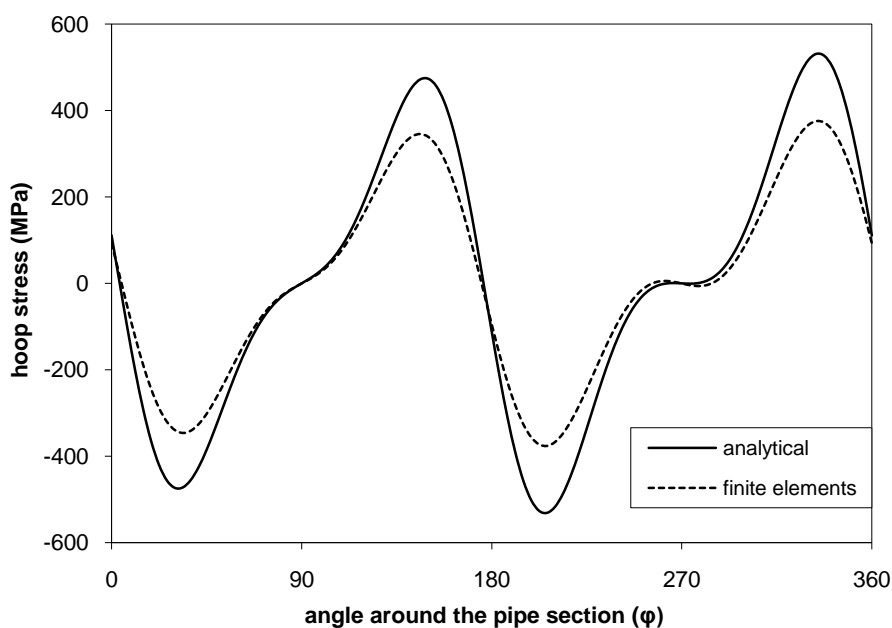


**Εικόνα 21:** Σύγκριση των αναλυτικών με τα αριθμητικά αποτελέσματα πεπερασμένων στοιχείων των διαμήκων τάσεων που αναπτύσσονται στο εξωτερικό μέρος του σωλήνα, για αντιεπίπεδη κάμψη,  $M=10 \text{ kN-m}$

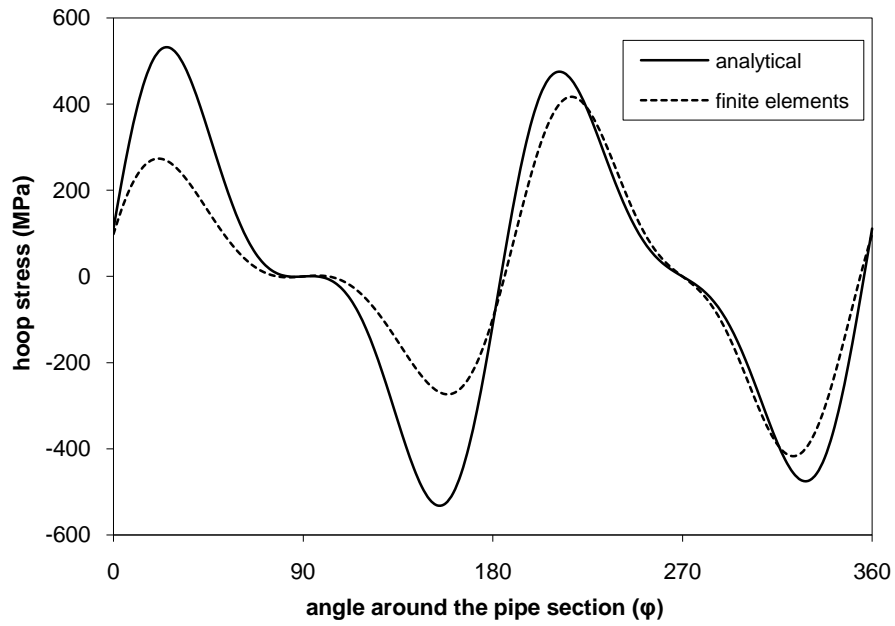


**Εικόνα 22:** Σύγκριση των αναλυτικών με τα αριθμητικά αποτελέσματα πεπερασμένων στοιχείων των διαμήκων τάσεων που αναπτύσσονται στο εσωτερικό μέρος του σωλήνα, για αντιεπίπεδη κάμψη,  $M=10 \text{ kN-m}$

Οι περιμετρικές τάσεις που αναπτύσσονται στο καμπύλο σωλήνα αποκτούν μέγιστες τιμές στις διαμέτρους που απέχουν  $45^\circ$  από τους κύριους άξονες, ενώ στα σημεία των κυρίων αξόνων οι τάσεις μηδενίζονται. Τα αποτελέσματα έρχονται σε σύμφωνη γνώμη με το σχήμα της παραμορφωμένης διατομής που παρουσιάστηκε παραπάνω (Εικόνα 23, Εικόνα 24).



**Εικόνα 23:** Σύγκριση των αναλυτικών με τα αριθμητικά αποτελέσματα πεπερασμένων στοιχείων των περιμετρικών τάσεων που αναπτύσσονται στο εξωτερικό μέρος του σωλήνα, για αντιεπίπεδη κάμψη,  $M=10$  kN-m



**Εικόνα 24:** Σύγκριση των αναλυτικών με τα αριθμητικά αποτελέσματα πεπερασμένων στοιχείων των περιμετρικών τάσεων που αναπτύσσονται στο εσωτερικό μέρος του σωλήνα, για αντεπίπεδη κάμψη,  $M=10$  kN-m

## 5. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Από την εργασία μπορούν να βγουν κάποια ενδιαφέροντα γενικά συμπεράσματα. Το κύριο χαρακτηριστικό ενός καμπύλου σωλήνα κάτω από κάμψη είναι η παραμόρφωση της διατομής του (ovalization) και αποτελεί το σημαντικότερο παράγοντα που επηρεάζει τη συμπεριφορά των σωλήνων κατά την κάμψη τους, ειδικά των καμπύλων τμημάτων.

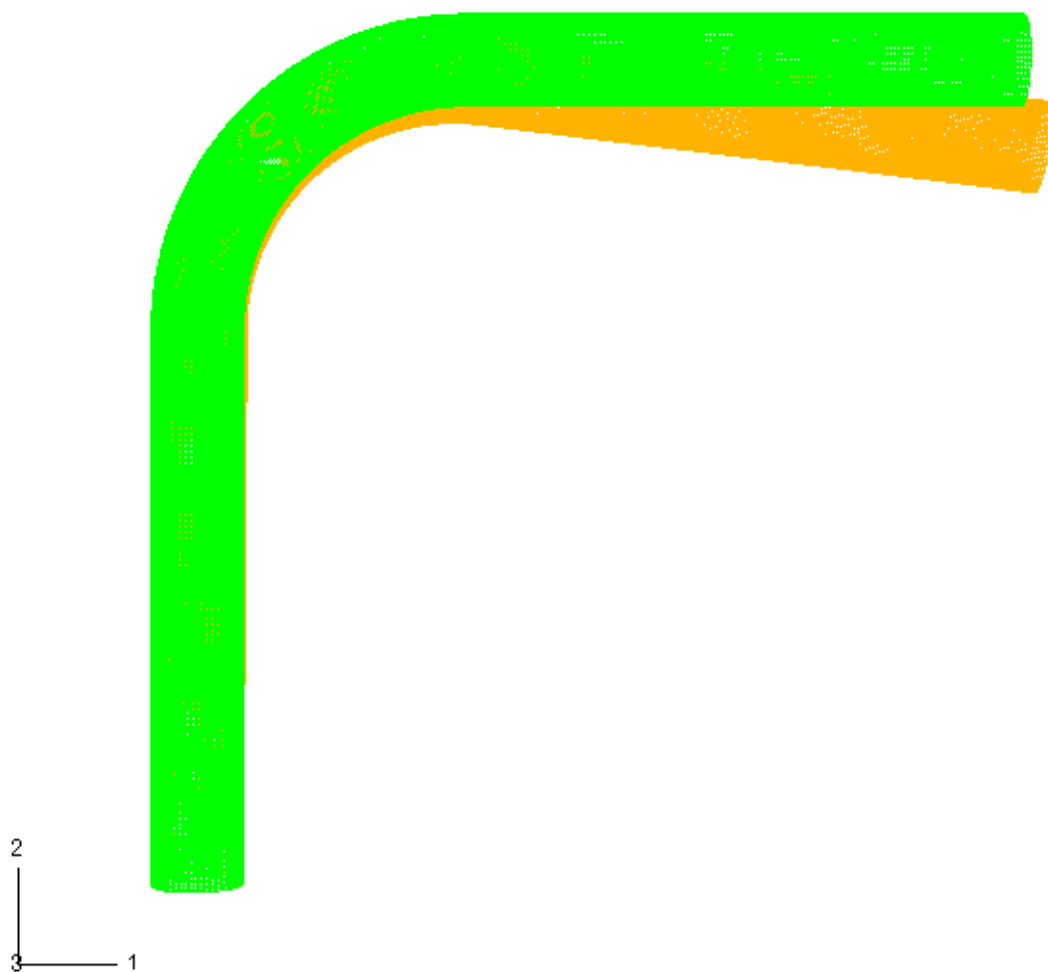
Είναι εμφανές ότι κατά την κάμψη καμπύλων σωληνώσεων οι τάσεις που αναπτύσσονται στα καμπύλα τμήματα είναι μεγαλύτερες από αυτές που αναπτύσσονται στα ευθύγραμμα τμήματα των σωλήνων και η κατανομή τους είναι μη-γραμμική. Επίσης, η σημαντικότερη φόρτιση για την δομική επάρκεια των σωλήνων είναι η συνεπίπεδη κάμψη, εξαιτίας των μεγάλων παραμορφώσεων των διατομών του σωλήνα σε σχέση με την αντιεπίπεδη κάμψη.

Επίσης, έγινε σύγκριση των αναλυτικών με τα αριθμητικά αποτελέσματα. Πρέπει να αναφερθεί ότι η αναλυτική λύση λαμβάνει υπ' όψη μόνο τα καμπύλα τμήματα των σωλήνων, πράγμα που σημαίνει ότι δεν λαμβάνει τις επιρροές των σωλήνων που συνδέονται με αυτά, και γι' αυτό το λόγο υπάρχει απόκλιση μεταξύ των αναλυτικών και των αριθμητικών αποτελεσμάτων.

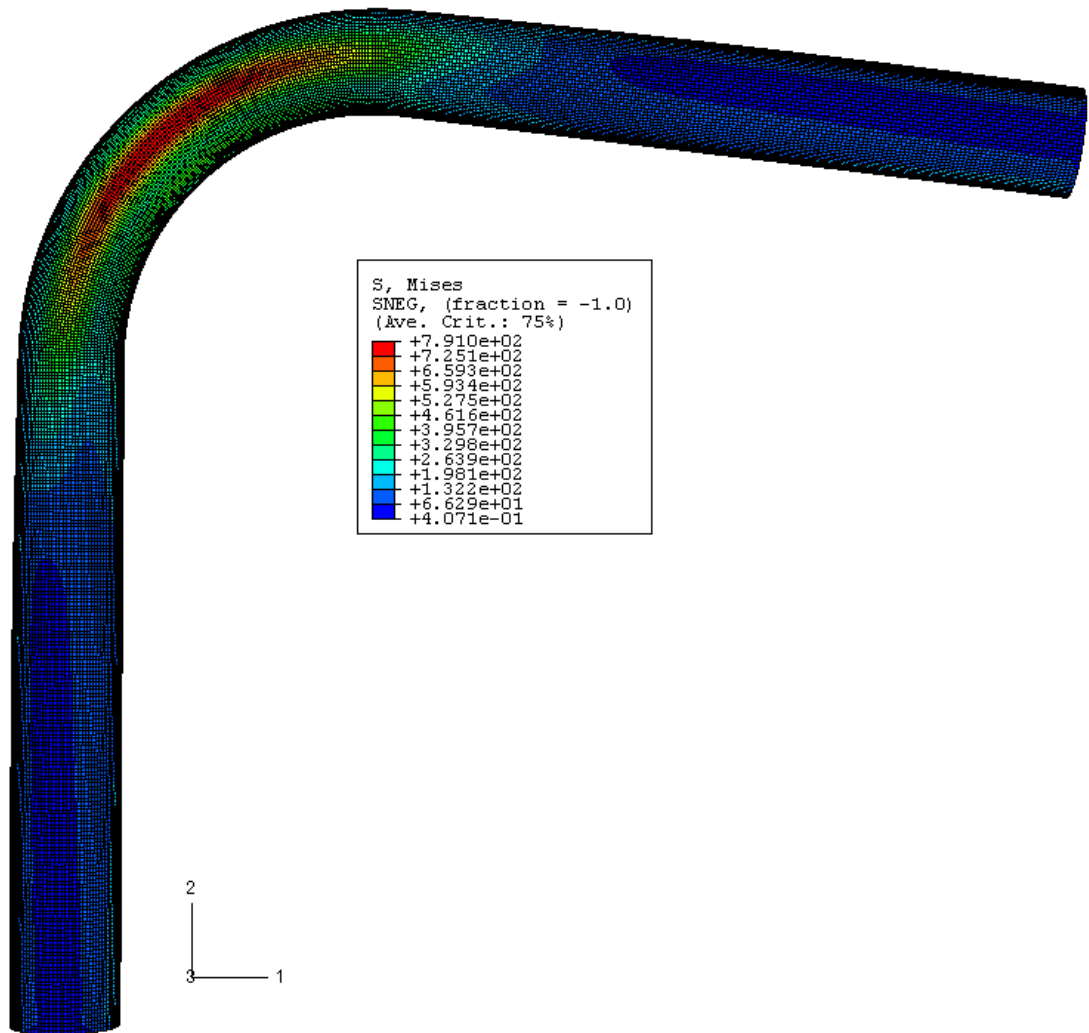


## ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

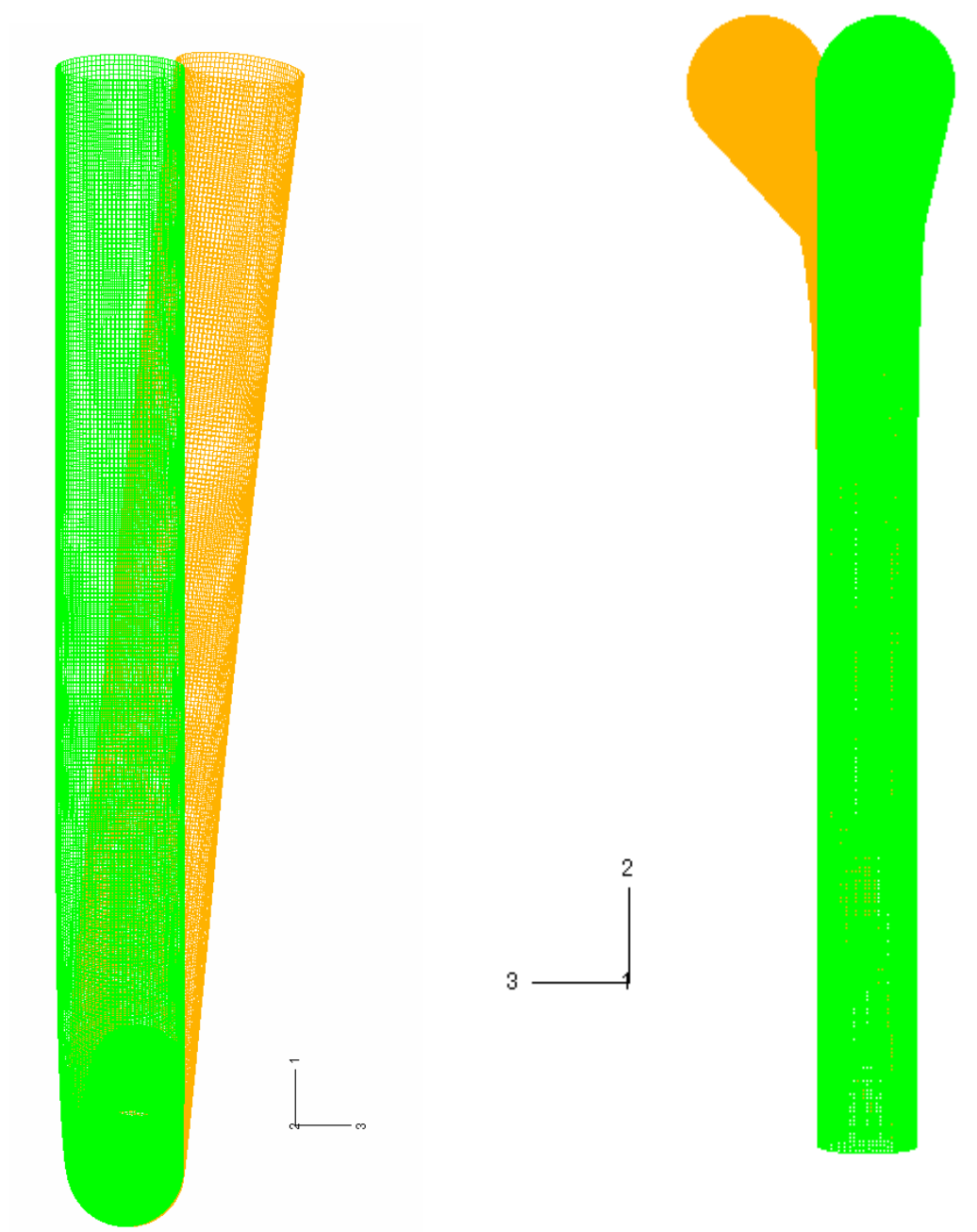
Στο σημείο αυτό, παρατίθενται τα μοντέλα που προσομοιώθηκαν με την χρήση πεπερασμένων στοιχείων στο ABAQUS.



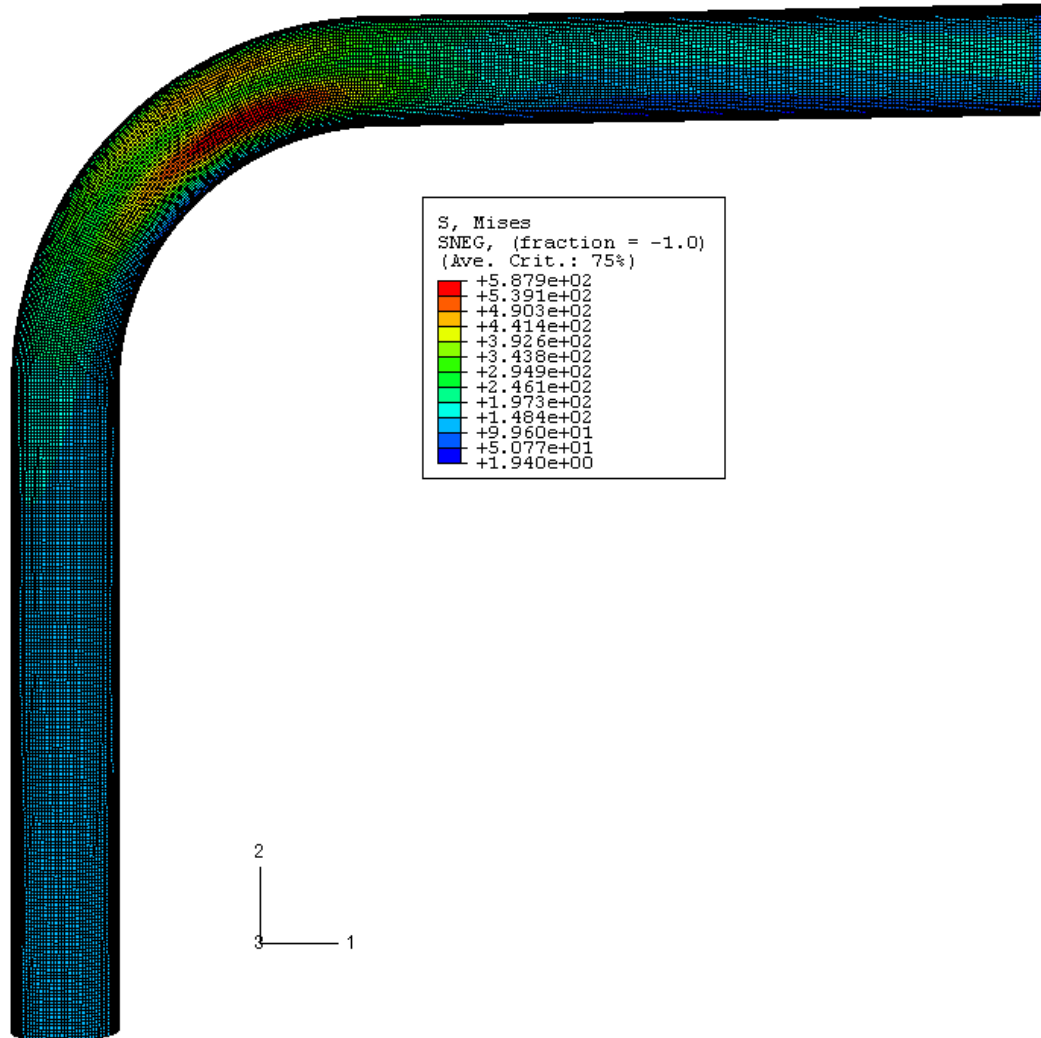
**Εικόνα 25:** Υπέρθυση απαραμόρφωτης και παραμορφωμένης μορφής του μοντέλου προσομοίωσης, σε συνεπίπεδη κάμψη



**Εικόνα 26:** Κατανομή τάσεων που αναπτύσσονται κατά την συνεπίπεδη κάμψη του μοντέλου



**Εικόνα 27:** Υπέρθυση απαραμόρφωτης και παραμορφωμένης μορφής του μοντέλου προσομοίωσης, σε αντιεπίπεδη κάμψη



**Εικόνα 28:** Κατανομή τάσεων που αναπτύσσονται κατά την αντιεπίπεδη κάμψη του μοντέλου

## **ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ**

- Dodge W. G. and Moore S. E., 1972, "Stress indices and flexibility factors for moment loadings on elbows and curved pipes". Weld. Res. Cows. Bull. 197.
- Hibbit, H. D., Karlsson and Sorensen, 2008, ABAQUS Theory Manual version 6.7, Hibbit, Karlsson and Sorensen Inc., Providence, RI.
- Hibbitt H. D. and Leung E. K., 1981, "An approach to detailed inelastic analysis of the thin walled pipelines. In Nonlinear Finite Element Analysis of Plates and Shells", AMD 48, pp. 83-118.
- Hibbitt H. D., Sorensen E. P. and Marcal P. V., 1973, "The elastic-plastic and creep analysis of pipelines by finite elements". ASME, 2nd International Conference on Pressure Vessel Technology, Paper No. I-18.
- Kafka P. G. and Dunn M. B., 1956, "Stiffness of curved circular tubes with internal pressure". J. appl. Mech. 78, 247-254.
- Marcal, P. V., 1967, "Elastic-Plastic behavior of Pipe Bends with In-plane Bending", J. Strain Analysis, Vol. 2, No. 1, pp. 84-90.
- Natarajan R., 1987, "A finite element for analysis of elbows subjected to different loads and end constraints". Com- DUL Struct. 26. 561-574.
- Natarajan R. and Blomfield J. A., 1975, "Stress analysis of curved pipes with end restraints". Comput. Struct. 5, 187-196.
- Ohstubo, H. and Watanabe, O., 1978, "Stress Analysis of Pipe Bends by Ring Elements", J. Pressure Vessel Technology, ASME, Vol. 100, pp. 112-122.
- Rodabaugh, E. C., and George, H. H., 1957, "Effect of internal pressure on the flexibility and stress intensification factors of curved pipe or welding elbows", Transactions of the ASME Vol. 79, pp.939-948.
- Sobel, L. H., 1977, "In-Plane Bending of Elbows", Computers & Structures, 7, 701-715.
- Vigness, I., 1943, "Elastic Properties Of Curved Tubes", Trans, ASME, 65, pp.105-120.
- Von Karman, Th., 1911, "Über die formänderung dünnwandiger Rohre, insbesondere federnder Ausgleichrohre", Z. Ver. Deutsch. Ingen., 55, pp. 1889-1895.